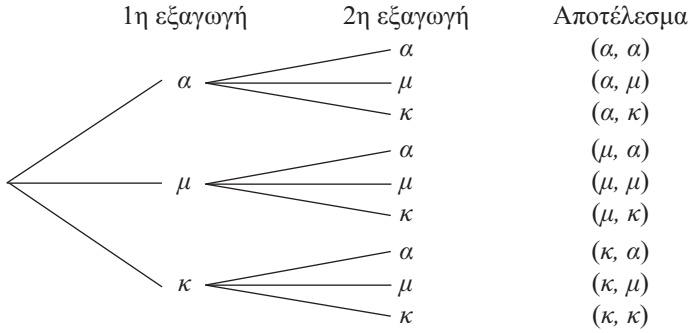
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§ 1.1. Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω α, μ, κ τα αποτελέσματα η μπάλα να είναι άσπρη, μαύρη και κόκκινη αντιστοίχως. Έχουμε:

i)

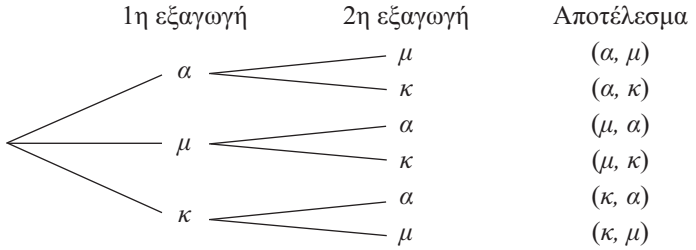


$\Omega = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \mu), (\alpha, \kappa), (\mu, \alpha), (\mu, \mu), (\mu, \kappa), (\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), \kappa, \kappa)\}$

ii) $\{(\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), (\kappa, \kappa)\}$

iii) $\{(\alpha, \alpha), (\mu, \mu), \kappa, \kappa)\}$.

2. i)



$\Omega = \{(\alpha, \mu), (\alpha, \kappa), (\mu, \alpha), (\mu, \kappa), (\kappa, \alpha), (\kappa, \mu)\}$

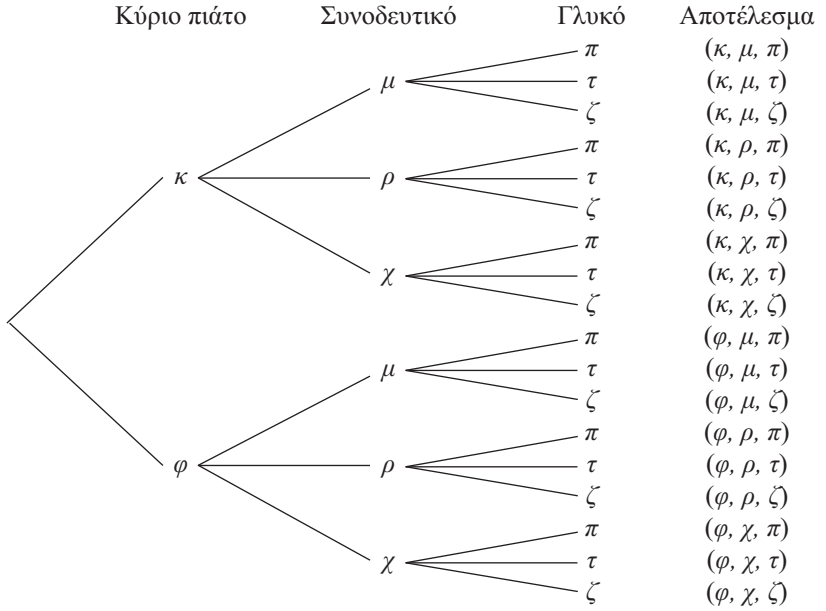
ii) $\{(\kappa, \alpha), (\kappa, \mu),\}$

iii) $\varnothing$.

3. i) Ω = {(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αυτοκίνητο), (Μακεδονία, τρένο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)}.

ii) Α = {(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)}.

4. i) Αν συμβολίσουμε καθεμία από τις επιλογές με το αρχικό της γράμμα, έχουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα:



Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις 18 τριάδες της στήλης "αποτέλεσμα" αποτελεί το δειγματικό χώρο του πειράματος:

ii) $A = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \chi, \pi), (\varphi, \mu, \pi), (\varphi, \rho, \pi), (\varphi, \chi, \pi)\}$

iii) $B = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \mu, \tau), (\kappa, \mu, \zeta), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \zeta), (\kappa, \chi, \pi), (\kappa, \chi, \tau), (\kappa, \chi, \zeta)\}$

iv) $A \cap B = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \chi, \pi)\}$

v) $\Gamma = \{(\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \tau), (\kappa, \rho, \zeta), (\varphi, \rho, \pi), (\varphi, \rho, \tau), (\varphi, \rho, \zeta)\}$

$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(\kappa, \rho, \pi)\}$.

5. i) $\Omega = \{(0, \alpha), (0, \beta), (0, \gamma), (0, \delta), (1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (1, \delta)\}$

ii) $A = \{(0, \gamma), (0, \delta)\}$

iii) $B = \{(0, \alpha), (0, \beta), (1, \alpha), (1, \beta)\}$

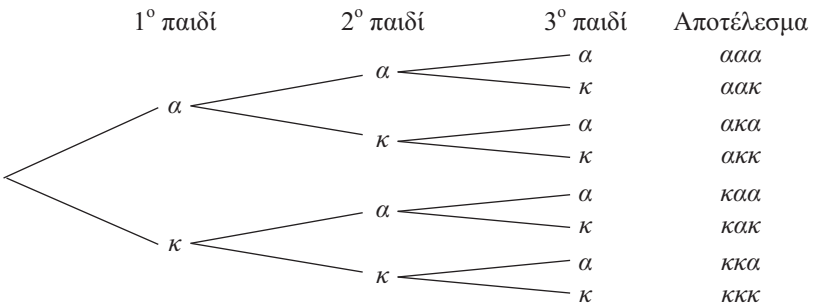
iv) $\Gamma = \{(1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (1, \delta)\}$.

6. i) $A = \{3\}$, $B = \{2,4,6\}$, $A \cap B = \varnothing$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή υπάρχουν και Έλληνες καθολικοί, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \varnothing$, δηλαδή τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

iii) Επειδή υπάρχουν γυναίκες άνω των 30, που να είναι 30 χρόνια παντρεμένες, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \varnothing$.
iv) $A \cap B = \varnothing$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

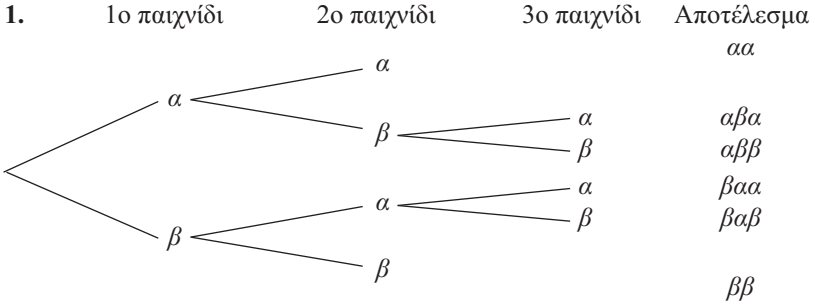
7.



$\Omega = \{ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ\}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.



$\Omega = \{αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ\}$.

2. Τα αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου.

1η ρίψη \ 2η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Άρα
$A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$.
$B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$.
$\Gamma = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}$.
$A \cap B = \{(3,1), (4,2), (5,1), (5,3), (6,2), (6,4)\}$.
$A \cap \Gamma = \{(2,1), (3,1), (4,1)\}$.
$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(3,1)\}$.

§ 1.2. Έννοια της πιθανότητας
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η τράπουλα έχει 4 πεντάρια και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{4}{52} = \mathbf{\frac{1}{13}}$.

ii) Το ενδεχόμενο είναι το αντίθετο του ενδεχομένου του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \mathbf{\frac{12}{13}}$.

2. Αν Γ το αποτέλεσμα "γράμματα" και K το αποτέλεσμα "κεφαλή", ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{K\Gamma, \Gamma K, KK, \Gamma\Gamma\}$ και υπάρχει μια ευνοϊκή περίπτωση η $\Gamma\Gamma$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

3. Το κουτί έχει συνολικά 10 + 15 + 5 + 10 = 40 μπάλες.

i) Οι μαύρες μπάλες είναι 15. Άρα η πιθανότητα να είναι η μπάλα μαύρη $\frac{15}{40}$.

ii) Υπάρχουν 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \mathbf{\frac{25}{40}}$.

iii) Το να μην είναι η μπάλα ούτε κόκκινη ούτε πράσινη, σημαίνει ότι μπορεί να είναι άσπρη ή μαύρη. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \mathbf{\frac{25}{40}}$.

4. Η τάξη έχει συνολικά 4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30 μαθητές. Για να έχει η οικογένεια ενός μαθητή 3 παιδιά, πρέπει ο μαθητής αυτός να έχει δηλώ-

σει ότι έχει 2 αδέλφια. Επειδή 9 μαθητές δήλωσαν ότι έχουν 2 αδέλφια, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\mathbf{\frac{9}{30}}$.

5. Έχουμε $\Omega = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, $A = \{12, 15, 18\}$ και $B = \{12, 16, 20\}$. Επομένως

i) $P(A) = \mathbf{\frac{3}{11}}$. ii) Έχουμε $P(B) = \frac{3}{11}$, άρα $P(B') = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$.

6. Αν Λ, Π και N είναι τα ενδεχόμενα να κερδίσουν ο Λευτέρης, ο Παύλος και ο Νίκος αντιστοίχως, τότε $P(\Lambda) = \frac{30}{100}$, $P(\Pi) = \frac{20}{100}$ και $P(N) = \frac{40}{100}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

i) $P(\Lambda \cup \Pi) = P(\Lambda) + P(\Pi) = \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{50}{100}$, δηλαδή **50%**.

ii) $P(\Lambda \cup N)' = 1 - P(\Lambda \cup N) = 1 - P(\Lambda) - P(N) = 1 - \frac{30}{100} - \frac{40}{100} = \frac{30}{100}$,

δηλαδή **30%**.

7. Έχουμε διαδοχικά

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$
$$\frac{17}{30} + \frac{7}{15} - P(A \cap B) = \frac{2}{3}$$
$$P(A \cap B) = \frac{17}{30} + \frac{7}{15} - \frac{2}{3} = \frac{17}{30} + \frac{14}{30} - \frac{20}{30} = \mathbf{\frac{11}{30}}.$$

8. Έχουμε διαδοχικά

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$
$$\frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$
$$P(B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$

9. Έχουμε διαδοχικά

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$
$$2P(A) - 0{,}2 = 0{,}6$$
$$2P(A) = 0{,}8$$
$$\mathbf{P(A) = 0{,}4}.$$

10. Έχουμε διαδοχικά $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \mathbf{\frac{3}{4}}.$$

11. Έχουμε

$$P(A\cup B) \le P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A\cap B) \le P(A) + P(B)$$
$$\Leftrightarrow 0 \le P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \text{ που ισχύει.}$$

12. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει κάρτα D και B το ενδεχόμενο να έχει κάρτα V.

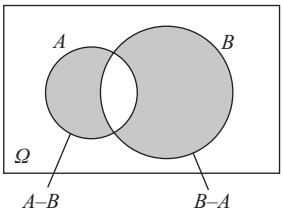
Έχουμε $P(A) = \frac{25}{100}$, $P(B) = \frac{55}{100}$, $P(A\cap B) = \frac{15}{100}$. Επομένως

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{25}{100} + \frac{55}{100} - \frac{15}{100} = \frac{65}{100}, \text{ δηλαδή } \mathbf{65\%}.$$

13. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει υπέρταση και B το ενδεχόμενο να έχει στεφανιαία νόσο. Έχουμε

$P(A) = \frac{10}{100}$, $P(B) = \frac{6}{100}$ και $P(A\cap B) = \frac{2}{100}$.



α) Έχουμε

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$$

$$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{2}{100} = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } \mathbf{14\%}.$$

β) Το ενδεχόμενο να έχει το άτομο μόνο μια ασθένεια είναι το $(A - B)\cup(B - A)$. Τα ενδεχόμενα $(A - B)$ και $(B - A)$ είναι ασυμβίβαστα. Επομένως

$$P\big((A - B)\cup(B - A)\big) = P(A - B) + P(B - A)$$
$$= P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$= P(A) + P(B) + 2P(A\cap B)$$
$$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{4}{100} = \frac{12}{100}, \text{ δηλαδή } \mathbf{12\%}.$$

14. Έστω A το ενδεχόμενο να μαθαίνει αγγλικά και B το ενδεχόμενο να μαθαίνει γαλλικά.

Έχουμε $P(A) = \frac{80}{100}$, $P(B) = \frac{30}{100}$ και $P(A \cap B) = \frac{20}{100}$.

Άρα
$$\begin{aligned} P\big((A \cup B)'\big) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{80}{100} - \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{10}{100}, \end{aligned}$$
δηλαδή **10%**.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}$

ii) $P\big((A \cup B)'\big) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}$

iii)
$$\begin{aligned} P\big((A - B) \cup (B - A)\big) &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2}\boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

2. Αν Α και Β τα ενδεχόμενα να μην έχει ένα νοικοκυριό τηλεόραση και Βίντεο αντιστοίχως, θα είναι $P(A) = \frac{15}{100}$ και $P(B) = \frac{40}{100}$ και $P(A \cap B) = \frac{10}{100}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:
$$\begin{aligned} P\big((A \cup B)'\big) &= 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - \left(\frac{15}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100}\right) = 1 - \frac{45}{100} = \frac{55}{100}, \end{aligned}$$
δηλαδή **55%**.

3. Έχουμε διαδοχικά
$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{3}{4}$$
$$4P(A) = 3 - 3\,P(A)$$
$$7P(A) = 3,$$
$$P(A) = \mathbf{\frac{3}{7}}, \qquad P(A') = 1 - P(A) = \mathbf{\frac{4}{7}}.$$

4. Αν $P(A) = x$, τότε $P(A') = 1 - x$, όπου $0 < x < 1$.

Έχουμε $\dfrac{1}{P(A)} + \dfrac{1}{P(A')} \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} \geq 4$

$$\Leftrightarrow 1 - x + x \geq 4x(1-x)$$
$$\Leftrightarrow 1 - x + x \geq 4x - 4x^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0 \qquad \text{που ισχύει.}$$

5. • Έχουμε

$$A \cap B \subseteq A$$
$$P(A \cap B) \leq P(A)$$
$$P(A \cap B) \leq 0{,}6 \qquad (1)$$

• Έχουμε

$$P(A \cup B) \leq 1$$
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$
$$0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1$$
$$0{,}6 + 0{,}7 - 1 \leq P(A \cap B)$$
$$0{,}3 \leq P(A \cap B) \qquad (2)$$

από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0{,}3 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}6.$$

6. $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) - 1 + P(A) \leq P(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow P(B) + P(A) - P(A \cap B) \leq 1$$
$$\Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1 \qquad \text{που ισχύει.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 2.1. Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

(i) $A = \dfrac{\left(xy^3\right)^4}{\left(x^2y^3\right)^2} : \left(\dfrac{y^{-1}}{x^3}\right)^3 = \dfrac{x^4y^{12}}{x^4y^6} \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^6 \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^9 \cdot x^9 = \left(x\,y\right)^9$

(ii) Για x = 2010 και $y = \dfrac{1}{2010}$ έχουμε x y = 1 οπότε

$A = 1^9 = 1.$

2. Έχουμε $A = \left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 : \dfrac{1}{x^3y^7}\right]^2 = \left[\dfrac{x^2}{y^2} \cdot x^3y^7\right]^2 = \left(x^5 \cdot y^5\right)^2 = \left(xy\right)^{10}$

Για x = 0,4 και y = –2,5 είναι xy = –1 οπότε $A = (-1)^{10} = 1$.

3. i) $1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)\,(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4.000.$

ii) $99 \cdot 101 = (100 - 1)\,(100 + 1) = 100^2 - 1 = 10000 - 1 = 9.999.$

iii) $\dfrac{(7{,}23)^2 - (4{,}23)^2}{11{,}46} = \dfrac{(7{,}23 + 4{,}23)(7{,}23 - 4{,}23)}{11{,}46} = \dfrac{11{,}46 \cdot 3}{11{,}46} = 3$

4. i) Έχουμε

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$
$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta$$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i):

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2 = 4\,\frac{999}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = 4$$

5. i) Έχουμε

$$\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = \alpha^2 - (\alpha^2 - 1) = \alpha^2 - \alpha^2 + 1 = 1$$

ii) Αν εφαρμόσουμε το ερώτημα (i) για $\alpha = 1{,}3265$ η τιμή που προκύπτει για την παράσταση είναι 1.

6. Έστω ν και ν + 1 δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί:
Τότε έχουμε

$$(\nu + 1)^2 - \nu^2 = (\nu + 1 - \nu)(\nu + 1 + \nu) = (\nu + 1) + \nu$$

7. Ισχύει

$$2^\nu + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2} = 2^\nu (1 + 2 + 2^2) = 2^\nu \cdot 7$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή
Έχουμε

i) $$\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - 1} = \alpha - 1$$

ii) $$\frac{\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$$

2. Έχουμε

i) $$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^2(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^3}$$

$$= \frac{(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha + 1)^2} = (\alpha - 1)^2$$

ii) $$\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)} = 1$$

3. Έχουμε

i) $$(x + y)^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-2} = (x + y)^2\left(\frac{y + x}{x\,y}\right)^{-2} = (x + y)^2\left(\frac{x\,y}{x + y}\right)^2 = (x\,y)^2 = x^2 y^2$$

ii) $$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$

$$=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1}{\frac{y+x}{xy}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{xy}{x+y}=\frac{xy}{x-y}$$

4. Έχουμε

$$\left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x-y}-y\right)=\frac{(x+y)\,(x^2-xy+y^2)}{(x-y)\,(x+y)}:\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=1$$

5. i) <u>α΄ τρόπος:</u> Με γενίκευση της ιδιότητας 1iv) των αναλογιών (βλ. εφαρμογή 1, σελ. 26) έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma+\alpha}=1,$$

οπότε $\alpha=\beta=\gamma$.

<u>β΄ τρόπος:</u> Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=k$, οπότε έχουμε

$$\alpha=k\beta,\quad \beta=k\gamma\quad \text{και}\quad \gamma=k\alpha \tag{1}$$

Αν, τώρα, προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), βρίσκουμε

$$\alpha+\beta+\gamma=k(\alpha+\beta+\gamma)$$

οπότε έχουμε $k=1$ (αφού $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, διότι τα α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου).
Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

<u>γ΄ τρόπος:</u> Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να αποδειχθεί, μετά τη διδασκαλία της § 1.3, ως εξής:
Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), οπότε έχουμε
$\alpha\beta\gamma=k^3(\alpha\beta\gamma)$ και, επειδή $\alpha\beta\gamma\neq 0$, θα είναι $k^3=1$ και άρα $k=1$.
Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$.

<u>Σχόλιο:</u> Ο συγκεκριμένος τρόπος μπορεί να εφαρμοσθεί και όταν τα α, β, γ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδενός, ενώ για τους δύο πρώτους τρόπους απαιτείται στην περίπτωση αυτή να αποδειχτεί ότι $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

ii) α΄ τρόπος: Έχουμε $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ (1) και $\alpha - \beta = \gamma - \alpha$ (2), οπότε, αν προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$2\alpha - 2\beta = \beta - \alpha \Rightarrow 3\alpha = 3\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Έτσι, από την ισότητα (1) βρίσκουμε ότι και $\beta = \gamma$. Άρα $\alpha = \beta = \gamma$ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

β΄ τρόπος: Θέτουμε $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha = k$, οπότε έχουμε

$$\alpha - \beta = k, \quad \beta - \gamma = k \text{ και } \gamma - \alpha = k \qquad (2)$$

Αν τώρα προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (2), βρίσκουμε ότι $k = 0$, οπότε, λόγω των ισοτήτων αυτών, είναι $\alpha = \beta = \gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

6. Αν x και y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε θα ισχύει

$$L = 2x + 2y \quad \text{και} \quad E = xy$$

οπότε, λόγω της υπόθεσης, θα έχουμε

$$2x + 2y = 4\alpha \quad \text{και} \quad xy = \alpha^2$$

και άρα

$$y = 2\alpha - x \quad (1) \quad \text{και} \quad xy = \alpha^2 \quad (2)$$

Λόγω της (1), η (2) γράφεται ισοδύναμα:

$$x(2\alpha - x) = \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha x - x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

Έτσι από την (1) έχουμε ότι και $y = \alpha$ και άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

7. Θα εργασθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

i) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha + \beta = \gamma \in \mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta = \gamma - \alpha \in \mathbb{Q}$ (ως διαφορά ρητών), που είναι άτοπο.

ii) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha\beta = \gamma \in \mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta = \dfrac{\gamma}{\alpha} \in \mathbb{Q}$ (ως πηλίκο ρητών), που είναι άτοπο.

§ 2.2. Διάταξη πραγματικών αριθμών
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 \geq 0$ που ισχύει.

ii) Είναι $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

2. Έχουμε $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + \beta^2 \geq 0$ που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

3. i) Ισχύει $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ και $y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ και $y = -1$.

ii) Έχουμε $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ και $y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ και $y = -2$.

4. i) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες

$$4{,}5 < x < 4{,}6 \quad \text{και} \quad 5{,}3 < y < 5{,}4$$

οπότε έχουμε

$$4{,}5 + 5{,}3 < x + y < 4{,}6 + 5{,}4$$

δηλαδή $9{,}8 < x + y < 10$.

ii) Από τη δεύτερη ανισότητα προκύπτει

$$-5{,}4 < -y < -5{,}3$$

και προσθέτουμε κατά μέλη με την $4{,}5 < x < 4{,}6$

οπότε έχουμε

$$4{,}5 - 5{,}4 < x - y < 4{,}6 - 5{,}3 \Leftrightarrow -0{,}9 < x - y < -0{,}7.$$

iii) Ισχύει $5{,}3 < y < 5{,}4$ οπότε

$$\frac{1}{5{,}3} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5{,}4} \Leftrightarrow \frac{1}{5{,}4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5{,}3}$$

και άρα $4{,}5 \cdot \frac{1}{5{,}4} < x \cdot \frac{1}{y} < 4{,}6 \cdot \frac{1}{5{,}3} \Leftrightarrow \frac{45}{54} < \frac{x}{y} < \frac{46}{53}$

iv) Επειδή τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο οπότε έχουμε

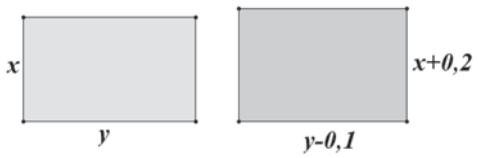
$$(4{,}5)^2 < x^2 < (4{,}6)^2 \Leftrightarrow 20{,}25 < x^2 < 21{,}16 \text{ και}$$

$$(5{,}3)^2 < y^2 < (5{,}4)^2 \Leftrightarrow 28{,}09 < y^2 < 29{,}16$$

προσθέτουμε κατά μέλη οπότε

$20{,}25 + 28{,}09 < x^2 + y^2 < 21{,}16 + 29{,}16 \Leftrightarrow 48{,}34 < x^2 + y^2 < 50{,}32.$

5.



Για το x έχουμε:

$$2 + 0{,}2 < x + 0{,}2 < 3 + 0{,}2 \Leftrightarrow 2{,}2 < x + 0{,}2 < 3{,}2, \quad (1)$$

Για το y έχουμε:

$$3 - 0{,}1 < y - 0{,}1 < 5 - 0{,}1 \Leftrightarrow 2{,}9 < y - 0{,}1 < 4{,}9, \quad (2)$$

(i) Η περίμετρος τότε γίνεται

$$\Pi = 2(x + 0{,}2) + 2(y - 0{,}1) = 2(x + y + 0{,}1)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε $5{,}1 < x + y + 0{,}1 < 8{,}1$ οπότε

$$2 \cdot 5{,}1 < 2(x + y + 0{,}1) < 2 \cdot 8{,}1 \Leftrightarrow 10{,}2 < \Pi < 16{,}2.$$

(ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται

$$E = (x + 0{,}2)(y - 0{,}1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (2) κατά μέλη οπότε έχουμε

$$2{,}2 \cdot 2{,}9 < (x + 0{,}2)(y - 0{,}1) < 3{,}2 \cdot 4{,}9 \Leftrightarrow 6{,}38 < E < 15{,}68.$$

6. Επειδή $(1 + \alpha)(1 + \beta) > 0$ έχουμε

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha}(1+\alpha)(1+\beta) < \frac{\beta}{1+\beta}(1+\alpha)(1+\beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1 + \beta) < \beta(1 + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta, \quad \text{που ισχύει.}$$

7. Ισχύει $5 - x < 0$ οπότε κατά την απλοποίησή του η ανισότητα αλλάζει φορά. Έτσι το σωστό είναι

$$x(5 - x) > (5 + x)(5 - x) \Leftrightarrow x < 5 + x \Leftrightarrow 0 < 5, \quad \text{που ισχύει.}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Επειδή οι α, β, γ είναι θετικοί, έχουμε

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)\beta > \alpha(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma > \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma > \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta > \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1, \quad \text{που ισχύει.}$$

ii) Ομοίως

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)\beta < \alpha(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma < \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$\Leftrightarrow \beta\gamma < \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta < \alpha \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 1$, που ισχύει.

2. Ισχύει $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta - \alpha\beta - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \alpha(1 - \beta) - (1 - \beta) > 0$

$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$, που ισχύει, αφού $\alpha > 1$ και $\beta < 1$.

3. Έχουμε τις ισοδυναμίες

$$(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

4. i) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, που ισχύει.

ii) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$, που ισχύει.

§ 2.3. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $|\pi - 3| = \pi - 3$, αφού $\pi > 3$.

ii) $|\pi - 4| = 4 - \pi$, αφού $\pi < 4$.

iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi| = \pi - 3 + 4 - \pi = 1$.

iv) $\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right| = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 0$

2. Είναι $|x - 3| = x - 3$, αφού $x > 3$ και $|x - 4| = 4 - x$, αφού $x < 4$ οπότε $|x - 3| + |x - 4| = x - 3 + 4 - x = 1$.

3. i) Αν $x < 3$, τότε ισχύει και $x < 4$, οπότε $x - 3 < 0$ και $4 - x > 0$.
Άρα είναι $|x - 3| - |4 - x| = (3 - x) - (4 - x) = 3 - x - 4 + x = -1$.

ii) Αν $x > 4$, τότε είναι και $x > 3$, οπότε $x - 4 > 0$ και $x - 3 > 0$.
Άρα έχουμε $|x - 3| - |4 - x| = x - 3 + (4 - x) = 1$.

4. Είναι $\dfrac{|\alpha - \beta|}{|\beta - \alpha|} = \dfrac{|\beta - \alpha|}{|\beta - \alpha|} = 1$.

5. • Αν x > 0 και y > 0, τότε $A = \frac{x}{x} + \frac{y}{y} = 1 + 1 = 2$

• Αν x > 0 και y < 0, τότε $A = \frac{x}{x} - \frac{y}{y} = 1 - 1 = 0$

• Αν x < 0 και y < 0, τότε $A = \frac{-x}{x} - \frac{y}{y} = -1 - 1 = -2$

• Αν x < 0 και y > 0, τότε $A = \frac{-x}{x} + \frac{y}{y} = -1 + 1 = 0.$

6. i) Ισχύει $d(2{,}37, D) \leq 0{,}005$ (1)

ii) Ισχύει (1) $\Leftrightarrow |2{,}37 - D| \leq 0{,}005 \Leftrightarrow 2{,}37 - 0{,}005 \leq D \leq 2{,}37 + 0{,}005$

$\Leftrightarrow 2{,}365 \leq D \leq 2{,}375.$

7.

Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\lvert x-4\rvert \leq 2$	$d(x,4) \leq 2$	$[2, 6]$
$\lvert x+3\rvert < 4$	$d(x,-3) < 4$	$(-7, 1)$
$\lvert x-4\rvert > 2$	$d(x,4) > 2$	$(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$
$\lvert x+3\rvert \geq 4$	$d(x,-3) \geq 4$	$(-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$

Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\lvert x-5\rvert < 1$	$d(x,5) < 1$	$(4, 6)$
$\lvert x+1\rvert > 2$	$d(x,-1) > 2$	$(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
$\lvert x-5\rvert \geq 1$	$d(x,5) \geq 1$	$(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$
$\lvert x+1\rvert \leq 2$	$d(x,-1) \leq 2$	$[-3, 1]$

Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\lvert x\rvert < 2$	$d(x,0) < 2$	$(-2, 2)$
$\lvert x+2\rvert \leq 3$	$d(x,-2) \leq 3$	$[-5, 1]$
$\lvert x\rvert \geq 2$	$d(x,0) \geq 2$	$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
$\lvert x+2\rvert > 3$	$d(x,-2) > 3$	$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας έχουμε
$|\alpha - \beta| = |(\alpha - \gamma) + (\gamma - \beta)| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$.

2. Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ και άρα $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$ οπότε έχουμε:

i) $\dfrac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \dfrac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$ και

ii) $\dfrac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2} = \dfrac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = \dfrac{2\beta}{2} = \beta$.

3. Επειδή $|x| \geq 0$ και $|y| \geq 0$, έχουμε:

$$|x| + |y| \geq 0$$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει $|x| = 0$ και $|y| = 0$, δηλαδή $x = 0$ και $y = 0$.
Διαφορετικά ισχύει η ανισότητα. Επομένως:
i) $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $y = 0$.
ii) $|x| + |y| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ή $y \neq 0$.

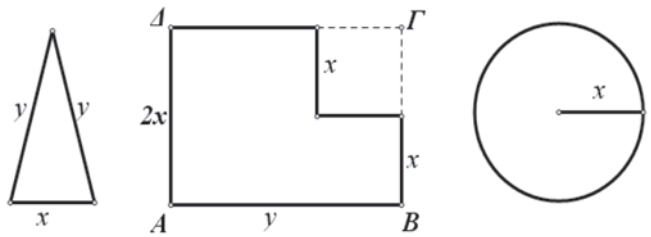
4. i) Από $0 < \alpha < \beta$ προκύπτει ότι $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1$ και $\dfrac{\beta}{\alpha} > 1$. Είναι δηλαδή $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1 < \dfrac{\beta}{\alpha}$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|1 - \dfrac{\alpha}{\beta}\right| < \left|1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\right|$ ή, ισοδύναμα, ότι $1 - \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\beta}{\alpha} - 1$.

Επειδή $\alpha\beta > 0$ η ανισότητα αυτή γράφεται ισοδύναμα

$$\alpha\beta - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \alpha\beta < \frac{\beta}{\alpha}\alpha\beta - \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha^2 < \beta^2 - \alpha\beta$$
$$\Leftrightarrow 0 < \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 > 0, \text{ που ισχύει αφού } \alpha \neq \beta.$$

5. Είναι $|x - 2| < 0{,}1 \Leftrightarrow 1{,}9 < x < 2{,}1$ (1) και
$|y - 4| < 0{,}2 \Leftrightarrow 3{,}8 < y < 4{,}2$ (2)



i) Η περίμετρος P_1 του τριγώνου είναι $P_1 = x + 2y$. Από την ανισότητα (2) προκύπτει ότι

$$7{,}6 < 2y < 8{,}4 \qquad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3), έχουμε:

$1{,}9 + 7{,}6 < x + 2y < 2{,}1 + 8{,}4 \Leftrightarrow 9{,}5 < P_1 < 10{,}5.$

ii) Η περίμετρος P_2 του σχήματος είναι ίση με την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, οπότε είναι $P_2 = 4x + 2y$. Από την ανισότητα (1) προκύπτει ότι

$$7{,}6 < 4x < 8{,}4 \qquad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) και (3), έχουμε:

$$7{,}6 + 7{,}6 < 4x + 2y < 8{,}4 + 8{,}4 \Leftrightarrow 15{,}2 < P_2 < 16{,}8.$$

iii) Η περίμετρος L του κύκλου είναι $L = 2\pi x$. Από την (1) προκύπτει

$$2\pi \cdot 1{,}9 < 2\pi x < 2\pi \cdot 2{,}1 \Leftrightarrow 3{,}8\pi < L < 4{,}2\pi.$$

§ 2.4. Ρίζες πραγματικών αριθμών
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$,

$\sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = 10$, $\sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$.

ii) $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$, $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$, $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$, $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$.

iii) $\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$, $\sqrt[3]{0{,}001} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}$,

$\sqrt[4]{0{,}0001} = \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{10}$, $\sqrt[5]{0{,}00001} = \sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$.

2. i) $\sqrt{(\pi - 4)^2} = |\pi - 4| = 4 - \pi$.

ii) $\sqrt{(-20)^2} = |-20| = 20$.

iii) $\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$.

iv) $\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{|x|}{2}$.

3. Έχουμε

$$\sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{5}\right| + \left|3 - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1.$$

4. $\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}\right)=\left(\sqrt{x-5}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2$

$$= (x-5)-(x+3)$$
$$= x-5-x-3=-8,$$

με την προϋπόθεση ότι $x-5\geq 0$ και $x+3\geq 0$, δηλαδή για $x\geq 5$.

5. i) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}\right)$

$$=\left(\sqrt{2\cdot 4}-\sqrt{2\cdot 9}\right)\left(\sqrt{2\cdot 25}+\sqrt{2\cdot 36}-\sqrt{2\cdot 16}\right)$$
$$=\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)$$
$$=\left(-\sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2}\right)=-7\left(\sqrt{2}\right)^2=-14.$$

ii) $\left(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32}\right)\left(\sqrt{63}-\sqrt{32}\right)$

$$=\left(\sqrt{4\cdot 7}+\sqrt{7}+\sqrt{2\cdot 16}\right)\left(\sqrt{7\cdot 9}-\sqrt{2\cdot 16}\right)$$
$$=\left(2\sqrt{7}+\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right)=\left(3\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right)$$
$$=\left(3\sqrt{7}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2=9\cdot 7-16\cdot 2=63-32=31.$$

6. i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2.$$

ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$

$$=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9-5}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\cdot 4}=\sqrt[3]{8}=2.$$

7. i) <u>1ος τρόπος:</u>

$$\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3]{2}\,.$$

<u>2ος τρόπος:</u>

$$\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{2\cdot 2^{1/3}}}=\sqrt{\sqrt{2^{4/3}}}$$
$$=\sqrt{\left(2^{4/3}\right)^{1/2}}=\sqrt{2^{2/3}}=\left(2^{2/3}\right)^{1/2}=2^{1/3}=\sqrt[3]{2}\,.$$

ii) <u>1ος τρόπος:</u>

$$\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}$$
$$=\sqrt[5]{2\sqrt[6]{2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6\cdot 2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^{10}}}=\sqrt[30]{2^{10}}=\sqrt[3]{2}.$$

ii) <u>2ος τρόπος:</u>

$$\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot 2^{1/3}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{2^{4/3}}}=\sqrt[5]{2\cdot\left(2^{4/3}\right)^{1/2}}$$

$$=\sqrt[5]{2\cdot 2^{2/3}}=\sqrt[5]{2^{5/3}}=\left(2^{5/3}\right)^{1/5}=2^{1/3}=\sqrt[3]{2}.$$

8. i) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}=3^{\frac{9}{12}+\frac{4}{12}}=3^{\frac{13}{12}}=3\cdot 3^{\frac{1}{12}}=3\sqrt[12]{3}.$

ii) $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2^{\frac{8}{9}}\cdot 2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{8}{9}+\frac{5}{6}}=2^{\frac{16}{18}+\frac{15}{18}}=2^{\frac{31}{18}}=2\cdot 2^{\frac{13}{18}}=2\sqrt[18]{2^{13}}.$

iii) $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=5^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{4}{6}}=5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{6}}=5^{\frac{9}{6}+\frac{2}{6}+\frac{4}{6}}=5^{\frac{15}{6}}=5^{\frac{5}{2}}$

$$=\sqrt{5^5}=5^2\cdot\sqrt{5}=25\sqrt{5}.$$

9. i) $\dfrac{25\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{75}}=\dfrac{25\cdot\sqrt{4\cdot 3}}{\sqrt{25\cdot 3}}=\dfrac{25\cdot 2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=10.$

ii) Με ανάλυση του 216 σε πρώτους παράγοντς βρίσκουμε $216=2^3\cdot 3^3$ οπότε έχουμε

$$\frac{\sqrt{216}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2^3\cdot 3^3}\cdot\sqrt{25\cdot 3}}{\sqrt{2\cdot 25}}=\frac{5\sqrt{2^3\cdot 3^4}}{5\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2^3\cdot 3^4}{2}}=\sqrt{2^2\cdot 3^4}=2\cdot 3^2=18.$$

10. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε κλάσμα με τη συζηγή παράσταση του παρονομαστή του έχουμε:

i) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}=\dfrac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{25-3}=\dfrac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{22}=\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}.$

ii) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5}=4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right).$

iii) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)}{7-6}=\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2$

$$=7+6+2\sqrt{42}=13+2\sqrt{42}.$$

11. i) Αν αναλύσουμε τους 162 και 98 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων βρίσκουμε $162 = 2 \cdot 3^4$ και $98 = 2 \cdot 7^2$ οπότε είναι

$$\frac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2\cdot 3^4}+\sqrt{2\cdot 7^2}}{\sqrt{2\cdot 25}-\sqrt{2\cdot 16}} = \frac{9\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-4\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 16.$$

ii) Είναι $9^{12} + 3^{20} = 9^{12} + (3^2)^{10} = 9^{12} + 9^{10} = 9^{10} \cdot (9^2 + 1) = 82 \cdot 9^{10}$.

και $9^{11} + 27^6 = 9^{11} + (3 \cdot 9)^6 = 9^{11} + 3^6 \cdot 9^6 = 9^{11} + (3^2)^3 \cdot 9^6$

$= 9^{11} + 9^9 = 9^9(9^2 + 1) = 82 \cdot 9^9$

οπότε έχουμε

$$\sqrt{\frac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^6}} = \sqrt{\frac{82\cdot 9^{10}}{82\cdot 9^9}} = \sqrt{9} = 3.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{9+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}-4}{3-2} = 5+\sqrt{6}.$$

ii) $$\frac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \frac{\left(\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)} = \frac{\alpha^2+\alpha\sqrt{\alpha\beta}-\beta\sqrt{\alpha\beta}-\beta^2}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}\,(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} = \alpha+\beta+\sqrt{\alpha\beta}.$$

2. i) Αξιοποιώντας γνωστές ταυτότητες έχουμε:

$\left(3+2\sqrt{7}\right)^2 = 9 + 4 \cdot 7 + 12\sqrt{7} = 37 + 12\sqrt{7}$ και

$\left(3-2\sqrt{7}\right)^2 = 9 + 4 \cdot 7 - 12\sqrt{7} = 37 - 12\sqrt{7}$.

ii) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (i) παίρνουμε

$$\sqrt{37+12\sqrt{7}} - \sqrt{37-12\sqrt{7}}$$
$$= \sqrt{\left(3+2\sqrt{7}\right)^2} - \sqrt{\left(3-2\sqrt{7}\right)^2}$$
$$= \left|3+2\sqrt{7}\right| - \left|3-2\sqrt{7}\right| = 3+2\sqrt{7} - \left(2\sqrt{7}-3\right) = 6.$$

3. i) Είναι

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}+\frac{3}{2}+2 = \frac{4}{6}+\frac{9}{6}+\frac{12}{6} = \frac{25}{6}$$

που είναι ρητός αριθμός.

ii) Είναι

$$\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$=\alpha+\frac{1}{\alpha}+2=\frac{\alpha^2+1+2\alpha}{\alpha}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$$

που είναι ρητός αριθμός.

4. i) Μετατρέποντας τους παρονομαστές σε ρητούς έχουμε

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}+\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{5}+3+5-\sqrt{5}\,\sqrt{3}}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

ii) Είναι

- $\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$ και
- $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$ οπότε

Έχουμε

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}-\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}-\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7+4\sqrt{3}-7+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}.$$

5. i) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=\alpha+\beta$, οπότε $B\Gamma=\sqrt{\alpha+\beta}$.

ii) Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει $B\Gamma<AB+A\Gamma$ που σημαίνει ότι $\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

iii) Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$\sqrt{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\le\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta\le\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}\Leftrightarrow 0\le 2\sqrt{\alpha\beta}$, που ισχύει.

Το "=" ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=0$ ή $\beta=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 3.1. Εξισώσεις 1ου βαθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x + 3 = 7x - 42$

$\Leftrightarrow 4x - 6x - 7x = -42 - 3 \Leftrightarrow -9x = -45 \Leftrightarrow x = 5.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 5$.

ii) $\dfrac{1-4x}{5} - \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{x-4}{20} + \dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow 20\,\dfrac{1-4x}{5} - 20\,\dfrac{x+1}{4} = 20\,\dfrac{x-4}{20} + 20\,\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow 4(1 - 4x) - 5(x + 1) = x - 4 + 25 \Leftrightarrow 4 - 16x - 5x - 5 = x + 21$

$\Leftrightarrow -21x - x = 21 + 1 \Leftrightarrow -22x = 22 \Leftrightarrow x = -1.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = -1$.

iii) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{5} - \dfrac{49}{60} \Leftrightarrow 60 \cdot \dfrac{x}{2} - 60 \cdot \dfrac{x}{3} = 60 \cdot \dfrac{x}{4} - 60 \cdot \dfrac{x}{5} - 60 \cdot \dfrac{49}{60}$

$\Leftrightarrow 30x - 20x = 15x - 12x - 49 \Leftrightarrow 30x - 20x - 15x + 12x = -49$

$\Leftrightarrow 7x = -49 \Leftrightarrow x = -7.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = -7$.

iv) $1{,}2(x + 1) - 2{,}5 + 1{,}5x = 8{,}6 \Leftrightarrow 12(x + 1) - 25 + 15x = 86$

$\Leftrightarrow 12x + 12 - 25 + 15x = 86 \Leftrightarrow 27x = 99 \Leftrightarrow x = \dfrac{99}{27} = \dfrac{11}{3}.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = \dfrac{11}{3}$.

2. i) $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4 \Leftrightarrow 6x - 2 - 6x + 3 = 4 \Leftrightarrow 0x = 3.$

Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) $2x - \dfrac{5-x}{3} = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{7x}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot 2x - 3 \cdot \dfrac{5-x}{3} = 3 \cdot \left(\dfrac{-5}{3}\right) + 3 \cdot \dfrac{7x}{3}$

$\Leftrightarrow 6x - 5 + x = -5 + 7x \Leftrightarrow 0x = 0.$

Άρα, η εξίσωση είναι ταυτότητα.

3. i) • Αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} = 1.$$

• Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

ii) • Αν $\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda}{\lambda - 2}.$$

• Αν $\lambda = 2$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 2$ και είναι αδύνατη.

iii) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

• Αν $\lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda}.$$

• Αν $\lambda = 0$ η εξίσωση γίνεται $0x = -1$ και είναι αδύνατη.
• Αν $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

iv) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)x = \lambda(\lambda + 1)$.

• Αν $\lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}.$$

• Αν $\lambda = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.
• Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 2$ και είναι αδύνατη.

4. Έστω $AM = x$, τότε $\Delta M = 5 - x$, οπότε

$$E_1 = \frac{3(5 - x)}{2} \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{x \cdot 5}{2}.$$

i) Η ισότητα $E_1 + E_2 = E_3$ είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$E_1 + E_2 = \dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$ από την οποία προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{3(5 - x)}{2} + \frac{5x}{2} = \frac{(5 + 3)5}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{15 - 3x}{2} + 4 \cdot \frac{5x}{2} = 4 \cdot \frac{40}{4}$$

$$\Leftrightarrow 30 - 6x + 10x = 40 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Επομένως η θέση του Μ προσδιορίζεται από το μήκος $AM = 2{,}5$, είναι δηλαδή το μέσο του ΑΔ.

ii) Η ισότητα $E_1 = E_2$ είναι ισοδύμαμη με την εξίσωση

$$\frac{3(5-x)}{2} = \frac{5x}{2} \Leftrightarrow 15 - 3x = 5x \Leftrightarrow 15 = 8x \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}.$$

Επομένως η θέση του Μ προσδιορίζεται από το μήκος $AM = \frac{15}{8}$.

5. Αν το ποσό των x ευρώ κατατέθηκε προς 5%, τότε το υπόλοιπο ποσό των (4000 – x) ευρώ κατατέθηκε προς 3%.

– Το ποσό των x ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{5}{100}x$ ευρώ

– Το ποσό των (4000 – x) ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{3}{100}(4000 - x)$ ευρώ.

Η εξίσωση που αντιστοιχεί στο πρόβλημα είναι

$$\frac{5}{100}x + \frac{3}{100}(4000 - x) = 175 \Leftrightarrow 5x + 3(4000 - x) = 100 \cdot 175$$

$\Leftrightarrow 5x + 12.000 - 3x = 17.500 \Leftrightarrow 2x = 17.500 - 12.000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 5.500 \Leftrightarrow x = 2.750$ ευρώ.

Επομένως τα 2.750 ευρώ τοκίστηκαν προς 5% και τα υπόλοιπα 1.250 ευρώ τοκίστηκαν προς 3%.

6. i) $v = v_0 + \alpha t \Leftrightarrow \alpha t = v - v_0 \Leftrightarrow t = \frac{v - v_0}{\alpha}$, αφού $\alpha \neq 0$.

ii) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{R_2 R}$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $R_2 - R \neq 0$, αφού το $\frac{1}{R_1} \neq 0$.

Επομένως έχουμε $R_1 = \frac{R_2 R}{R_2 - R}$.

7. i) $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 + 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ ή $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και –1.

ii) $(x - 2)^2 - (2 - x)(4 + x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (x - 2)(x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)[(x - 2) + (x + 4)] = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και –1.

8. i) $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{x^3} - x - \cancel{x^3} + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0 και 1.

ii) $(x + 1)^2 + x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + \cancel{1} + x^2 - \cancel{1} = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 1) \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 0$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί –1 και 0.

9. i) $x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow x(x - 2)^2 (x - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και 1.

ii) $(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2)$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - 1) - (x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)[(x + 2) - (x + 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

10. i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $x - 1 = 0$ ή $x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2, 1 και –1.

ii) $x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 2) - (2x - 1)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

11. i) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{x^2 - x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{x(x-1)}$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow x^2(x-1) = x - 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (αφού } x \neq 1).$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -1$.

ii) $\dfrac{x+1}{x^2-1} + \dfrac{2}{x^2 - 2x + 1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{2}{(x-1)^2} = 0.$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1,$$

που απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

Επομένως και η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

12. i) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς του περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\frac{1}{x-1} + (x-1)(x+1)\frac{1}{x+1} = (x-1)(x+1)\frac{2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + x - 1 = 2$$

$\Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$, που απορρίπτεται, αφού $x \neq 1$.

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq -2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$$

$$\Leftrightarrow x(x+2)\frac{3}{x+2} - x(x+2)\frac{2}{x} = x(x+2)\frac{x-4}{x(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2x - 4 = x - 4 \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ταυτότητα. Αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς αυτό σημαίνει ότι η αρχική εξίσωση έχει ως λύση κάθε πραγματικό εκτός από τους αριθμούς 0 και –2.

iii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq -2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = x \Leftrightarrow 0x = 2, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

iv) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq -1$ και $x \neq 1$. Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x+1},$$

που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, με $x \neq \pm 1$.

13. Έστω $x - 1$, x, $x + 1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Ζητούμε ακέραιο x τέτοιον ώστε να ισχύει

$(x - 1) + x + (x + 1) = (x - 1)\, x(x + 1)$

$\Leftrightarrow 3x = x(x^2 - 1)$

$\Leftrightarrow x(3 - x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x(4 - x^2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

Επομένως υπάρχουν τρεις τριάδες τέτοιων διαδοχικών αριθμών, οι εξής:

$$(-1, 0, 1), \quad (1, 2, 3) \quad \text{και} \quad (-3, -2, -1).$$

14. i) $|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = 5$ ή $2x - 3 = -5$

$\Leftrightarrow 2x = 8$ ή $2x = -2 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και –1.

ii) $|2x - 4| = |x - 1| \Leftrightarrow 2x - 4 = x - 1$ ή $2x - 4 = -x + 1$

$\Leftrightarrow x = 3$ ή $3x = 5 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = \frac{5}{3}$.

iii) Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης $|x - 2| = 2x - 1$ είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή, πρέπει και το δεύτερο μέλος να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει

$$2x - 1 \geq 0 \qquad (1)$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$|x - 2| = 2x - 1 \Leftrightarrow x - 2 = 2x - 1$ ή $x - 2 = 1 - 2x$

$\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x = 1$ που ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

iv) Ομοίως, για την εξίσωση $|2x - 1| = x - 2$, πρέπει

$$x - 2 \geq 0 \qquad (2)$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$|2x - 1| = x - 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2$ ή $2x - 1 = 2 - x$

$\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$.

Από τις παραπάνω λύσεις καμία δεν είναι δεκτή, αφού καμία δεν επαληθεύει τον περιορισμό (2). Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

15. i) Έχουμε:

$$\frac{|x| + 4}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 15 \cdot \frac{|x| + 4}{3} - 15 \cdot \frac{|x| + 4}{5} = 15 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 5|x| + 20 - 3|x| - 12 = 10$$

$$\Leftrightarrow 2|x| = 2 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί –1 και 1.

ii) $$\frac{2|x| + 1}{3} - \frac{|x| - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{2|x| + 1}{3} - 6 \cdot \frac{|x| - 1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 4|x| + 2 - 3|x| + 3 = 3 \Leftrightarrow |x| = -2$, που είναι αδύνατη.

16. i) Η εξίσωση $\left|\frac{3 - x}{3 + x}\right| = 4$ ορίζεται για $x \neq -3$.

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\left|\frac{3 - x}{3 + x}\right| = 4 \Leftrightarrow |3 - x| = 4 \cdot |3 + x|$$

$$\Leftrightarrow 3 - x = 4(x + 3) \text{ ή } 3 - x = -4(x + 3)$$

$$\Leftrightarrow 3 - x = 4x + 12 \text{ ή } 3 - x = -4x - 12$$

$$\Leftrightarrow 5x = -9 \text{ ή } 3x = -15 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5} \text{ ή } x = -5.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί –5 και $-\frac{9}{5}$.

ii) $|x-1|\,|x-2| = |x-1| \Leftrightarrow |x-1|\,(|x-2|-1) = 0$

$\Leftrightarrow |x-1| = 0$ ή $|x-2| = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x-2 = 1$ ή $x-2 = -1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$ ή $x = 1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 3.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $(x+\alpha)^2 - (x-\beta)^2 = 2\alpha(\alpha+\beta)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - (x^2 - 2\beta x + \beta^2) = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - x^2 + 2\beta x - \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta$

$\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)x = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)^2$.

- Αν $\alpha+\beta \neq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2(\alpha+\beta)} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
- Αν $\alpha+\beta = 0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

ii) Για $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{x-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha(x-\alpha) = \beta(x-\beta) \Leftrightarrow \alpha x - \alpha^2 = \beta x - \beta^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha x - \beta x = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)x = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta).$$

- Αν $\alpha-\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta} = \alpha+\beta$.
- Αν $\alpha-\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$, οπότε είναι ταυτότητα.

2. i) Για $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta x - \alpha x}{\alpha\beta} = 1 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)x = \alpha\beta.$$

- Αν $\beta-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq \alpha$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}$.
- Αν $\beta-\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \alpha^2$ και είναι αδύνατη γιατί $\alpha \neq 0$.

Επομένως η εξίσωση έχει λύση μόνο αν $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ και $\alpha \neq \beta$.

3. i) Στα 200 ml διάλυμα περιέχονται 30 ml καθαρό οινόπνευμα. Αν προσθέσουμε x ml καθαρό οινόπνευμα τότε το διάλυμα που θα προκύψει θα είναι (200 + x) ml και θα περιέχει (30 + x) ml καθαρό οινόπνευμα οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{30+x}{200+x} = \frac{32}{100} \Leftrightarrow 100(30+x) = 32(200+x) \cdot$$

$$\Leftrightarrow 3000 + 100x = 6400 + 32x \Leftrightarrow 68x = 3400$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3400}{68} \Leftrightarrow x = 50.$$

Επομένως ο φαρμακοποιός πρέπει να προσθέσει 50 ml καθαρό οινόπνευμα.

4. Έστω ότι x ώρες μετά την προσπέραση τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν μεταξύ τους 1 km. Το διάστημα που διανύει το Α στις x ώρες είναι 100x ενώ το αντίστοιχο διάστημα για το Β είναι 120x. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$120x - 100x = 1 \Leftrightarrow 20x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{20}$ ώρες, οπότε $x = \frac{1}{20} \cdot 60 = 3$ λεπτά.

Οπότε τα αυτοκίνητα θα απέχουν 1km τρία λεπτά μετά την προσπέραση.

5. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq \alpha$ και $x \neq -\alpha$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{x^2-\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{(x+\alpha)(x-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow (x+\alpha)^2 = x^2 \Leftrightarrow x+\alpha = x \quad \text{ή} \quad x+\alpha = -x$$

$$\Leftrightarrow 0x = \alpha \quad \text{ή} \quad 2x = -\alpha.$$

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση έχει ως λύση κάθε αριθμό $x \neq 0$.
- Αν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = \frac{-\alpha}{2}$.

6. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq 2$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+4 \Leftrightarrow \cancel{x^3} - \cancel{8} = \cancel{x^3} - 2x^2 + 4x - \cancel{8}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Από τις τιμές αυτές δεκτή είναι μόνο η $x = 0$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τον αριθμό $x = 0$.

7. $|2|x| - 1| = 3 \Leftrightarrow 2|x| - 1 = 3$ ή $2|x| - 1 = -3$

$\Leftrightarrow 2|x| = 4$ ή $2|x| = -2$.

Η δεύτερη είναι αδύνατη οπότε έχουμε

$$2|x| = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί –2 και 2.

8. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |3x - 5| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = |3x - 5|$

$\Leftrightarrow |x - 1| = |3x - 5|$

$\Leftrightarrow x - 1 = 3x - 5$ ή $x - 1 = -3x + 5$

$\Leftrightarrow 2x = 4$ ή $4x = 6 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = \dfrac{3}{2}$.

§ 3.2. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $x^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 5$.

ii) $x^5 - 243 = \Leftrightarrow x^5 = 3^5 \Leftrightarrow x = 3$.

iii) $x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

2. i) $x^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = (-5)^3 \Leftrightarrow x = -5$.

ii) $x^5 + 243 = 0 \Leftrightarrow x^5 = (-3)^5 \Leftrightarrow x = -3$.

iii) $x^7 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = (-1)^7 \Leftrightarrow x = -1$.

3. i) $x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8^2 \Leftrightarrow x = -8$ ή $x = 8$.

ii) $x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{81}$ ή $x = -\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$.

iii) $x^6 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{64}$ ή $x = -\sqrt[6]{64} \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$.

4. i) $x^5 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ ή $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.
Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και 2.

ii) $x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^3 = -1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$.
Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και –1.

iii) $x^5 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^4 = -16 \Leftrightarrow x = 0$
αφού η $x^4 = -16$ είναι αδύνατη.
Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

5. Για το x έχουμε την εξίσωση
$x \cdot x \cdot 3x = 81$, με $x > 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 81 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$.
Άρα, οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου είναι 3m, 3m και 9m.

6. i) $(x + 1)^3 = 64 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

ii) $1 + 125x^3 = 0 \Leftrightarrow (5x)^3 = -1 \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$.

iii) $(x - 1)^4 - 27(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)[(x - 1)^3 - 27] = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ή $(x - 1)^3 = 27$
$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x - 1 = 3$
$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$.

§ 3.3. Εξισώσεις 2ου βαθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες
$x_1 = \frac{5 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ και $x_2 = \frac{5 - 1}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$

ii) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την
$x = \frac{6}{2} = 3$.

iii) $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

2. i) $x^2 - 1{,}69 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1{,}69 \Leftrightarrow x = 1{,}3$ ή $x = -1{,}3$

ii) $0{,}5x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(0{,}5x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $0{,}5x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

iii) $3x^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9$, που είναι αδύνατη.

3. i) Έχουμε $\Delta = 4 + 4\lambda(\lambda - 2) = 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 4(\lambda - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Έχουμε $\Delta = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

4. Επειδή

$$\Delta = 4 - 4\mu^2 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1,$$

οι τιμές του μ για τις οποίες η εξίσωση έχει διπλή ρίζα είναι οι αριθμοί 1 και –1.

5. Έχουμε $\Delta = 4(\alpha+\beta)^2 - 4\cdot 2(\alpha^2+\beta^2) = 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 8\alpha\beta - 8\alpha^2 - 8\beta^2$

$= -4\alpha^2 - 4\beta^2 + 8\alpha\beta = -4(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)$

$= -4(\alpha-\beta)^2 < 0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Στην περίπτωση που είναι $\alpha = \beta \neq 0$, ισχύει $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

Αν είναι $\alpha = \beta = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $2 = 0$ και είναι αδύνατη.

6. i) $S = 2 + 3 = 5$ και $P = 2\cdot 3 = 6$, οπότε η εξίσωση είναι η $x^2 - 5x + 6 = 0$.

ii) $S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ και $P = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση είναι η:

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

iii) $S = \left(5 - 2\sqrt{6}\right) + \left(5 + 2\sqrt{6}\right) = 10$ και

$P = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5 + 2\sqrt{6}\right) = 25 - 4\cdot 6 = 1$ οπότε η εξίσωση είναι η:

$x^2 - 10x + 1 = 0.$

7. i) Είναι $S = 2$ και $P = -15$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 15 = 0$, η οποία έχει $\Delta = 4 - 4(-15) = 64$. Επομένως οι ζητουμενοι αριθμοί είναι

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ και } x_2 = \frac{2-8}{2} = -3.$$

ii) Είναι $S = 9$ και $P = 10$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 9x + 10 = 0$, η οποία έχει $\Delta = 81 - 4\cdot 10 = 41$. Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$x_1 = \frac{9+\sqrt{41}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{9-\sqrt{41}}{2}.$$

8. 1ος τρόπος:

i) Για να λύσουμε την εξίσωση αρκεί να βρούμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ και γινόμενο $\sqrt{15}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$. Οι αριθμοί αυτοί είναι προφανώς οι $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3}$ που είναι και οι ζητούμενες ρίζες της εξίσωσης.

2ος τρόπος:

Είναι $\Delta=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{15}=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-4\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$

$$=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2>0.$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$x_1=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{5} \quad \text{και}$$

$$x_2=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

ii) Είναι $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+4\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2>0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$x_1=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1}{2}=1 \quad \text{και} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{2}=-\sqrt{2}.$$

9. 1ος τρόπος:

$x^2+\alpha^2=\beta^2-2\alpha x \Leftrightarrow x^2+2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow (x+\alpha)^2-\beta^2=0$

$\Leftrightarrow (x+\alpha+\beta)(x+\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow x=-\alpha-\beta$ ή $x=\beta-\alpha$.

2ος τρόπος:

Η εξίσωση γράφεται $x^2+2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0$.

Είναι $\Delta=4\alpha^2-4(\alpha^2-\beta^2)=4\beta^2$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς

$$x_1=\frac{-2\alpha-2\beta}{2}=-(\alpha+\beta) \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-2\alpha+2\beta}{2}=\beta-\alpha.$$

10. Έστω x και y οι πλευρές του ορθογωνίου. Τότε έχουμε

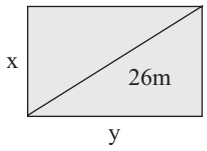
$2x+2y=68 \Leftrightarrow x+y=34 \Leftrightarrow y=34-x \quad (1)$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι

$x^2+y^2=26^2$, οπότε λόγω της (1) έχουμε

$x^2+(34-x)^2=26^2 \Leftrightarrow x^2+34^2-68x+x^2=26^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-68x+34^2-26^2=0$



$$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + (34 - 26)(34 + 26) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + 8 \cdot 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 34x + 4 \cdot 60 = 0.$$

Είναι $\Delta = 34^2 - 4 \cdot 4 \cdot 60 = 196$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{34 + 14}{2} = 24 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{34 - 14}{2} = 10.$$

Οι ρίζες αυτές λόγω και της (1) είναι οι ζητούμενες πλευρές του ορθογωνίου.

11. i) Η εξίσωση γράφεται $|x|^2 - 7|x| + 12 = 0$. Θέτουμε $|x| = \omega$ οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 7\omega + 12 = 0$ και έχει ρίζες $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = 4$ που είναι δεκτές και οι δύο, οπότε έχουμε $|x| = 3$ ή $|x| = 4$, που σημαίνει ότι $x = 3$ ή $x = -3$ ή $x = 4$ ή $x = -4$. Επομένως η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 3, –3, 4 και –4.

ii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε

$$x^2 + 2|x| - 35 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 2\omega - 35 = 0.$$

Είναι $\Delta = 144$.
Η εξίσωση έχει ρίζες 5 και –7. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 5$, που σημαίνει $x = 5$ ή $x = -5$.

iii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε $x^2 - 8|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 8\omega + 12 = 0$, αφού $x^2 = |x|^2$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 6 και 2, που είναι δεκτές και οι δύο. Επομένως $|x| = 6$ ή $|x| = 2$ που σημαίνει ότι $x = 6$ ή $x = -6$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

12. Θέτουμε $|x - 1| = \omega$, οπότε έχουμε
$(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 4\omega - 5 = 0$, αφού $(x - 1)^2 = |x - 1|^2$.
Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς –5 και 1. Δεκτή είναι μόνο η θετική $\omega = 1$ αφού $\omega = |x - 1| \geq 0$. Επομένως,

$$|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \text{ ή } x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 0.$$

Άρα, η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς 0 και 2.

13. Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$. Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = \omega$ οπότε η εξίσωση γράφεται $\omega^2 - 5\omega + 6 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες του αριθμούς 2 και 3, οπότε έχουμε

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{ή} \quad x + \frac{1}{x} = 3.$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

και έχει το 1 διπλή ρίζα.

Η δεύτερη γράφεται

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

και έχει ως ρίζες του αριθμούς

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς

$$1, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

14. i) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq -1$ και $x \neq 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6x(x+1)\frac{x}{x+1} + 6x(x+1)\frac{x+1}{x} = 6x(x+1)\frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6(x+1)^2 = 13x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6x^2 + 12x + 6 = 13x^2 + 13x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και –3.

ii) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$ και $x \neq 2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)\frac{2}{x} + x(x-2)\frac{2x-3}{x-2} + x(x-2)\frac{2-x^2}{x(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 + 2x^2 - 3x + 2 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και –1, οπότε λόγω των περιορισμών δεκτή είναι μόνο η $x = -1$.

15. i) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $y^2 + 6y - 40 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -10$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$, οπότε έχουμε $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί –2 και 2.

ii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $4y^2 + 11y - 3 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = \frac{1}{4}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$ δεκτή είναι μόνο η $y_2 = \frac{1}{4}$, οπότε έχουμε $x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ή $x = -\frac{1}{2}$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί $-\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$.

iii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $2y^2 + 7y + 3 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$ καμία από αυτές δεν είναι δεκτή. Επομένως η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

Σχόλιο: Είναι προφανές ότι η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού $2x^4 + 7x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-2\alpha^3)^2 - 4\alpha^2(\alpha^4 - 1) = 4\alpha^6 - 4\alpha^6 + 4\alpha^2 = 4\alpha^2$.

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{2\alpha^3 + 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 + 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}.$$

2. i) Είναι

$$\Delta = \left(5 - \sqrt{2}\right)^2 - 4\left(6 - 3\sqrt{2}\right) = 25 - 10\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 24 + 12\sqrt{2} =$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} + 1 = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2.$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2}}{2} = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2} = 3 \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

3. i) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν $\Delta = 0$.

Είναι $\Delta = (\alpha - 9)^2 - 4 \cdot 2(\alpha^2 + 3\alpha + 4) = \alpha^2 - 18\alpha + 81 - 8\alpha^2 - 24\alpha - 32$
$= -7\alpha^2 - 42\alpha + 49$, οπότε

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 7\alpha^2 + 42\alpha - 49 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -7$ ή $\alpha = 1$.
Επομένως για $\alpha = -7$ ή $\alpha = 1$ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

4. Αν το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ισχύει $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$.
Είναι $\rho \neq 0$, αφού $\gamma \neq 0$, οπότε έχουμε

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta\frac{1}{\rho} + \gamma\frac{1}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{\rho}\right) + \alpha = 0.$$

που σημαίνει ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. i) <u>1ος τρόπος:</u>
Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$x + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha + \frac{x-\alpha}{\alpha x} = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)\left(1 + \frac{1}{\alpha x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)\left(\frac{\alpha x + 1}{\alpha x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \text{ ή } \alpha x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\frac{1}{\alpha}.$$

<u>2ος τρόπος:</u>
Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$x + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha} - \alpha = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 + \left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^2 - \alpha + (1-\alpha^2)x = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0.$$

Είναι $\Delta = (\alpha^2 - 1)^2 - 4\alpha(-\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$

οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \alpha \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha}.$$

ii) <u>1ος τρόπος:</u>
Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$ Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(x-\beta) = \alpha\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(x-\beta) = \alpha\left(\frac{x-\beta}{\beta x}\right) \Leftrightarrow (x-\beta)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta x} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \beta x = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

<u>2ος τρόπος:</u>

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\beta x \frac{x}{\alpha} + \alpha\beta x \frac{\alpha}{x} = \alpha\beta x \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta x \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2 + \alpha^2\beta = \alpha^2 x + \beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2 - \beta^2 x + \alpha^2\beta - \alpha^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta x(x - \beta) + \alpha^2(\beta - x) = 0 \Leftrightarrow (x - \beta)(\beta x - \alpha^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \beta x = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

<u>3ος τρόπος:</u>

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\beta x \frac{x}{\alpha} + \alpha\beta x \frac{\alpha}{x} = \alpha\beta x \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta x \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2 + \alpha^2\beta = \alpha^2 x + \beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta = 0.$$

Είναι

$$\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2$$
$$= \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

• Αν $\alpha \neq \pm\beta$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta} \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + \beta^2}{2\beta} = \frac{2\beta^2}{2\beta} = \beta.$$

• Αν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ τότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, την

$$x = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{(\pm\beta)^2}{\beta} = \beta.$$

6. i) Έχουμε
$\Delta = 4\lambda^2 - 4(-8) = 4\lambda^2 + 32 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_2 = x_1^2$. Από τους τύπους Vieta έχουμε

• $x_1 + x_2 = -2\lambda \Leftrightarrow x_1 + x_1^2 = -2\lambda$ και

• $x_1 \cdot x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1^3 = -8 \Leftrightarrow x_1 = -2$, οπότε $x_2 = (-2)^2 = 4$.

Τότε έχουμε

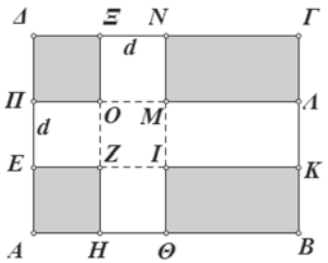
$-2 + 4 = -2\lambda \Leftrightarrow 2\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

7. Έστω $x - 1$, x, $x + 1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αν και μόνο αν ισχύει

$$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 4, \text{ αφού } x \neq 0 \text{ ως πλευρά τριγώνου.}$$

Η λύση $x = 4$ της εξίσωσης είναι μοναδική. Επομένως υπάρχει μία μόνο τριάδα διαδοχικών ακεραίων που είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Οι ακέραιοι αυτοί είναι οι 3, 4 και 5.

8. Το εμβαδόν E_1 του σταυρού προκύπτει από το άθροισμα των εμβαδών των δύο λευκών λωρίδων της σημαίας από το οποίο όμως πρέπει να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κοινού τετραγώνου (ΟΜΙΖ) πλευράς d. Είναι δηλαδή



$E_1 = 3 \cdot d + 4 \cdot d - d^2 = 7d - d^2$

Έστω E_2 το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας. Θα ισχύει $E_1 = E_2$ αν και μόνο αν το E_1 είναι ίσο με το μισό του εμβαδού ολόκληρης της σημαίας. Επομένως έχουμε

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow 7d - d^2 = \frac{3 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow d^2 - 7d + 6 = 0 \Leftrightarrow d = 1 \quad \text{ή} \quad d = 6.$$

Όμως για το d έχουμε τον περιορισμό $0 < d < 3$, οπότε $d = 1$.

9. Αν το μηχάνημα Α χρειάζεται x ώρες για να τελειώσει το έργο, όταν εργάζεται μόνο του, τότε το Β θα χρειάζεται $x + 12$ ώρες για το ίδιο έργο. Σε μία ώρα το Α εκτελεί τότε το $\frac{1}{x}$ μέρος του έργου ενώ το Β εκτελεί το $\frac{1}{x + 12}$ μέρος του έργου. Αν τα δύο μηχανήματα εργαστούν μαζί για 8 ώρες, τότε το Α εκτελεί το $8\frac{1}{x} = \frac{8}{x}$ μέρος του έργου, ενώ το Β εκτελεί το $8 \cdot \frac{1}{x + 12} = \frac{8}{x + 12}$ μέρος του έργου. Αν προσθέσουμε τα δύο αυτά μέρη

του έργου θα έχουμε ολόκληρο το έργο δηλαδή το 1 έργο. Έτσι έχουμε την εξίσωση του προβλήματος

$$\frac{8}{x}+\frac{8}{x+12}=1 \Leftrightarrow 8(x+12)+8x=x(x+12)$$

$$\Leftrightarrow 8x+96+8x=x^2+12x \Leftrightarrow x^2-4x-96=0.$$

Είναι $\Delta = 16 - 4(-96) = 400$, οπότε

$$x=\frac{4+20}{2}=12 \quad \text{ή} \quad x=\frac{4-20}{2}=-8.$$

Είναι δηλαδή $x = 12$, αφού $x > 0$. Επομένως το μηχάνημα Α χρειάζεται 12 ώρες γα να τελειώσει το έργο μόνο του, ενώ το Β χρειάζεται 24 ώρες.

10. Ο αριθμός 1 είναι ρίζα αν και μόνο αν επαληθεύει την εξίσωση δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει

$$1^4-10\cdot 1^2+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=9.$$

Για $\alpha = 9$ η εξίσωση γίνεται

$$x^4-10x^2+9=0.$$

Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται

$$y^2-10y+9=0.$$

Αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 9 και 1 οπότε έχουμε

$x^2 = 9$ ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 3, –3, 1, –1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§ 4.1. Ανισώσεις 1ου βαθμού

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{4}<\frac{x}{6} \Leftrightarrow 6(x-1)+3(2x+3)<2x$

$\Leftrightarrow 6x-6+6x+9<2x \Leftrightarrow 6x+6x-2x<6-9$

$\Leftrightarrow 10x<-3 \Leftrightarrow x<-\frac{3}{10}.$

ii) $\frac{x-12}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}>x \Leftrightarrow 2(x-12)+2x+3>4x$

$\Leftrightarrow 2x-24+2x+3>4x$

$\Leftrightarrow 2x+2x-4x>24-3 \Leftrightarrow 0x>21$ αδύνατη.

iii) $\frac{x-2}{2}+\frac{1-2x}{5}<\frac{x}{10}-\frac{2}{5} \Leftrightarrow 5x-10+2-4x<x-4$

$\Leftrightarrow 5x-4x-x<10-2-4$

$\Leftrightarrow 0x<4$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. • $3x-1<x+5 \Leftrightarrow 3x-x<1+5 \Leftrightarrow 2x<6 \Leftrightarrow x<3.$

• $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-x\le 2x+1 \Leftrightarrow -3x\le -3 \Leftrightarrow x\ge 1.$

Άρα $1\le x<3$.

3. • $x-\frac{1}{2}>\frac{x}{2}+1 \Leftrightarrow 2x-1>x+2 \Leftrightarrow 2x-x>1+2 \Leftrightarrow x>3.$

• $x-\frac{1}{3}\le\frac{x}{3}-1 \Leftrightarrow 3x-1\le x-3 \Leftrightarrow 3x-x\le 1-3 \Leftrightarrow 2x\le -2 \Leftrightarrow x\le -1.$

Άρα <u>δεν</u> υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες <u>συναληθεύουν</u> οι ανισώσεις.

4. • $2x - \frac{x-1}{8} > x \Leftrightarrow 16x - x + 1 > 8x \Leftrightarrow 16x - x - 8x > -1$

$\Leftrightarrow 7x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7}$.

• $x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + x + 1 < 0$

$\Leftrightarrow 2x + x < 8 - 1 \Leftrightarrow 3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$.

Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-\frac{1}{7}, \frac{7}{3})$. Οι ακέραιες τιμές του x στο διάστημα αυτό είναι οι 0, 1, 2.

5. i) $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$. Άρα $x \in (-3, 3)$.

ii) $|x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow 1 - 4 \leq x \leq 1 + 4$
$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$. Άρα $x \in [-3, 5]$.

iii) $|2x + 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 1 < 5 \Leftrightarrow -5 - 1 < 2x < 5 - 1$
$\Leftrightarrow -6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2$. Άρα $x \in (-3, 2)$.

6. i) $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 3$. Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

ii) $|x - 1| > 4 \Leftrightarrow x - 1 < -4$ ή $x - 1 > 4 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 5$.
Άρα $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$.

iii) $|2x + 1| \geq 5 \Leftrightarrow 2x + 1 \leq -5$ ή $2x + 1 \geq 5 \Leftrightarrow 2x \leq -6$ ή $2x \geq 4$
$\Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 2$. Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$.

7. i) Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$.
Επομένως $|2x - 6| = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3$.

ii) $|3x - 1| = 1 - 3x \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$.

8. i) $\frac{|x-1| - 4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3} \Leftrightarrow 3(|x - 1| - 4) + 10 < 2|x - 1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|x - 1| - 12 + 10 < 2|x - 1| \Leftrightarrow |x - 1| < 2$
$\Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Άρα $x \in (-1, 3)$.

ii) $\frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1-|x|}{3} \Leftrightarrow 3(|x|+1) - 4|x| > 2(1-|x|)$

$\Leftrightarrow 3|x| + 3 - 4|x| > 2 - 2|x|$

$\Leftrightarrow 3|x| - 4|x| + 2|x| > 2 - 3$

$\Leftrightarrow |x| > -1$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \le 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} \le 5 \Leftrightarrow |x-3| \le 5$

$\Leftrightarrow -5 \le x - 3 \le 5 \Leftrightarrow 3 - 5 \le x \le 5 + 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 8.$

Άρα $x \in [-2, 8]$.

10. Το κέντρο του διαστήματος $(-7, 3)$ είναι το $\frac{-7+3}{2} = -2$.

Έχουμε $x \in (-7, 3) \Leftrightarrow -7 < x < 3 \Leftrightarrow -7 - (-2) < x - (-2) < 3 - (-2)$

$\Leftrightarrow -7 + 2 < x + 2 < 3 + 2$

$\Leftrightarrow -5 < x + 2 < 5 \Leftrightarrow |x + 2| < 5.$

11. $41 \le \frac{9}{5}C + 32 \le 50 \Leftrightarrow 41 - 32 \le \frac{9}{5}C \le 50 - 32$

$\Leftrightarrow 9 \le \frac{9}{5}C \le 18 \Leftrightarrow 5 \le C \le 10.$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $3 \le 4x - 1 \le 6 \Leftrightarrow 3 \le 4x - 1$ και $4x - 1 \le 6$. Ζητάμε επομένως τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $3 \le 4x - 1$ και $4x - 1 \le 6$.

- $3 \le 4x - 1 \Leftrightarrow 4 \le 4x \Leftrightarrow 4x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 1.$
- $4x - 1 \le 6 \Leftrightarrow 4x \le 7 \Leftrightarrow x \le \frac{7}{4}.$

Άρα $x \in [1, \frac{7}{4}]$.

ii) $-4 \le 2 - 3x \le -2 \Leftrightarrow -4 \le 2 - 3x$ και $2 - 3x \le -2$.

- $-4 \le 2 - 3x \Leftrightarrow 3x \le 6 \Leftrightarrow x \le 2.$
- $2 - 3x \le -2 \Leftrightarrow -3x \le -4 \Leftrightarrow x \ge \frac{4}{3}.$

Άρα $x \in [\frac{4}{3}, 2]$.

2. i) $2 \le |x| \le 4 \Leftrightarrow 2 \le |x|$ και $|x| \le 4$.

- $2 \le |x| \Leftrightarrow |x| \ge 2 \Leftrightarrow x \le -2$ ή $x \ge 2$.
- $|x| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x \le 4$.

Άρα $x \in [-4, -2] \cup [2, 4]$.

ii) $2 \le |x - 5| \le 4 \Leftrightarrow 2 \le |x - 5|$ και $|x - 5| \le 4$.

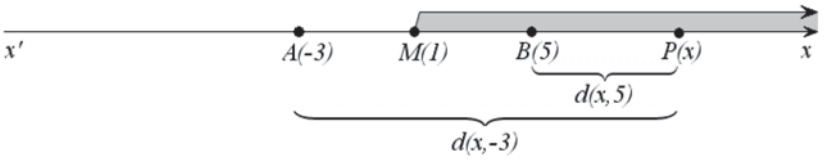
- $2 \le |x - 5| \Leftrightarrow |x - 5| \ge 2 \Leftrightarrow x - 5 \le -2$ ή $x - 5 \ge 2 \Leftrightarrow x \le 3$ ή $x \ge 7$.
- $|x - 5| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x - 5 \le 4 \Leftrightarrow 5 - 4 \le x \le 5 + 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 9$.

Άρα $x \in [1, 3] \cup [7, 9]$.

3. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο Μ του ΑΒ είναι ο:

$$x_0 = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

ii) Αν Ρ είναι το σημείο του x΄x που αντιστοιχεί σε λύση της ανίσωσης, τότε: $|x - 5| \le |x + 3| \Leftrightarrow d(x, 5) \le d(x, -3) \Leftrightarrow PA \le PB$.



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Ρ βρίσκεται προς τα δεξιά του μέσου Μ του ΑΒ. Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in [1, +\infty)$.

iii) Έχουμε:

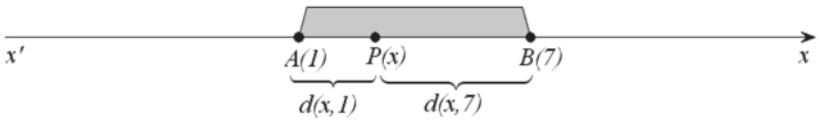
$$|x - 5| \le |x + 3| \Leftrightarrow |x - 5|^2 \le |x + 3|^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \le x^2 + 6x + 9$$
$$\Leftrightarrow -16x \le -16 \Leftrightarrow x \ge 1.$$

4. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο Μ του ΑΒ είναι ο:

$$x_0 = \frac{1 + 7}{2} = 4$$

ii) Αν Ρ είναι το σημείο του x΄x που αντιστοιχεί στη λύση x της εξίσωσης, τότε έχουμε

$$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow d(x, 1) + d(x, 7) = 6 \Leftrightarrow PA + PB = AB.$$



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο P είναι σημείο του τμήματος AB. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα $x \in [1, 7]$.

iii) Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου των παραστάσεων $x - 1$ και $x - 7$.

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν $x \in (-\infty, 1)$, τότε:
  $|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (1 - x) + (7 - x) = 6 \Leftrightarrow x = 1$, που απορρίπτεται διότι $1 \notin (-\infty, 1)$.
- Αν $x \in [1, 7)$, τότε:
  $|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (x - 1) + (7 - x) = 6 \Leftrightarrow 0x = 0$, που ισχύει για κάθε $x \in [1, 7)$.
- Αν $x \in [7, +\infty)$, τότε:
  $|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (x - 1) + (x - 7) = 6 \Leftrightarrow x = 7$, που είναι δεκτή διότι $7 \in [7, +\infty)$. Επομένως, η εξίσωση αληθεύει για $x \in [1, 7]$.

§ 4.2. Ανισώσεις 2ου βαθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Έχουμε: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$.

Άρα $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

ii) Έχουμε: $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ ή $x = 2$.

Επομένως

$2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$.

2. i) Είναι: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2} = \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(2x + 1)(x - 2)} = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$, $x \neq 2, x \neq -\frac{1}{2}$

ii) Έχουμε: $2x^2 + 8x - 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$

Επειδή $\Delta = 4^2 - 4 \quad (-21) = 100$, θα είναι

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -7 \end{matrix}$$

Επομένως $2x^2 + 8x - 42 = 2(x + 7)(x - 3)$.

Άρα: $\dfrac{2x^2 + 8x - 42}{x^2 - 49} = \dfrac{2(x + 7)(x - 3)}{(x + 7)(x - 7)} = \dfrac{2(x - 3)}{x - 7}$, $x \neq \pm 7$.

iii) • Για την εξίσωση $4x^2 - 12x + 9 = 0$, έχουμε

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$ (διπλή).

Επομένως $4x^2 - 12x + 9 = 4(x - \frac{3}{2})^2 = (2x - 3)^2$.

• Για την $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1$, $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{4} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{3}{2} \end{matrix}$

Επομένως $2x^2 - 5x + 3 = 2(x - \frac{3}{2})(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$.

Άρα $\dfrac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3} = \dfrac{(2x - 3)^2}{(2x - 3)(x - 1)} = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$, $x \neq 1$, $x \neq \dfrac{3}{2}$

3. i) $x^2 - 2x - 15 = 0$, $\Delta = 64$, $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 8}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow -3 \end{matrix}$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$		+	0	−	0	+	

ii) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2 - 4x + 1$		+	0	+	

iii) $x^2 - 4x + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 < 0$, $\alpha = 1 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 - 4x + 13$		+	

4. i) Το τριώνυμο $-x^2 + 4x - 3$ έχει $\alpha = -1$ και ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης

$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2+4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ii) Έχουμε $-9x^2 + 6x - 1 = -(9x^2 - 6x + 1) = -(3x - 1)^2$. Επομένως

x	$-\infty$		1/3		$+\infty$
$-9x^2+6x-1$		$-$	0	$-$	

iii) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x - 2$ έχει $\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4 < 0$ και $\alpha = -1 < 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2+2x-2$		$-$	

5. i) Είναι: $5x^2 \leq 20x \Leftrightarrow 5x^2 - 20x \leq 0 \Leftrightarrow 5x(x - 4) \leq 0$.

Το τριώνυμο $5x^2 - 20x$ έχει $\alpha = 5 > 0$ και ρίζες $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$5x^2-20x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in [0, 4]$.

ii) Είναι: $x^2 + 3x \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 + 3x - 4$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in [-4, 1]$.

6. i) Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

ii) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 5$ έχει $\alpha = 2 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x^2-3x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-1, \frac{5}{2})$.

7. i) Είναι: $x^2 + 4 > 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 2$.

ii) Είναι: $x^2 + 9 \leq 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$.

8. i) Το τριώνυμο $x^2 + 3x + 5$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = -11 < 0$. Άρα είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ανίσωση $x^2 + 3x + 5 \leq 0$ είναι αδύνατη.

ii) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 20$ έχει $\alpha = 2 > 0$ και $\Delta = -151 < 0$. Άρα η ανίσωση $2x^2 - 3x + 20 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Έχουμε $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$.
Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (1, 3)$.

10. Έχουμε $2x - 1 < x^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow 2x - 1 < x^2 - 4$ και $x^2 - 4 < 12$.
• Είναι: $2x - 1 < x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$.
Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3\ +\infty)$.

• Είναι: $x^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0$.
Το τριώνυμο $x^2 - 16$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
x^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως $x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$.

Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-4, -1) \cup (3, 4)$.

11. Έχουμε $x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$ και

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$

Άρα $x \in (1, 2) \cup (3, 5)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παράσταση $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = \alpha^2 + \beta \cdot \alpha - 2\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α. Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1(-2\beta^2) = 9\beta^2 \geq 0 \text{ και ρίζες } \alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm 3\beta}{2} \begin{matrix} \nearrow \beta \\ \searrow -2\beta \end{matrix}$$

Επομένως $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)$.

• Ομοίως η παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 = \alpha^2 - \beta \cdot \alpha - 6\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α. Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1(-6\beta^2) = 25\beta^2 \text{ και ρίζες } \alpha_{3,4} = \frac{\beta \pm 5\beta}{2} \begin{matrix} \nearrow 3\beta \\ \searrow -2\beta \end{matrix}$$

Επομένως $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - 3\beta)$.

ii) $\dfrac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - \beta\beta^2} = \dfrac{(\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)}{(\alpha + 2\beta)(\alpha - 3\beta)} = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha - 3\beta}$, $\alpha \neq 3\beta$, $\alpha \neq -2\beta$.

2. $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 0$.

$\Delta = (2\beta - \alpha)^2 - 4 \cdot 2(-\alpha\beta) = 4\beta^2 - 4\alpha\beta + \alpha^2 + 8\alpha\beta$
$= 4\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2 = (2\beta + \alpha)^2 \geq 0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_{1,2} = \dfrac{-(2\beta - \alpha) \pm (2\beta + \alpha)}{4} \begin{matrix} \nearrow \frac{\alpha}{2} \\ \searrow -\beta \end{matrix}$

Άρα $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 2(x - \frac{\alpha}{2})(x + \beta) = (2x - \alpha)(x + \beta)$.

3. • Έχουμε $x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta = x(x - \alpha) + \beta(x - \alpha) = (x - \alpha)(x + \beta)$.

• Το τριώνυμο $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$ έχει ρίζες $x_1 = \alpha$ και $x_2 = 2\alpha$ οπότε $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = (x - \alpha)(x - 2\alpha)$. Επομένως

$$\frac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2} = \frac{(x-\alpha)(x+\beta)}{(x-\alpha)(x-2\alpha)} = \frac{x+\beta}{x-2\alpha}, \text{ με } x \neq \alpha,\ x \neq 2\alpha.$$

4. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = 9\lambda^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda + 5) = 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda = 5\lambda^2 - 20\lambda.$$

Η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή λ, $\alpha = 5 > 0$ και ρίζες $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 4$.

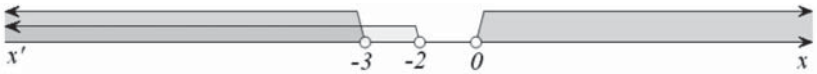
λ	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$5\lambda^2 - 20\lambda$		+	0	−	0	+	

Επομένως η δοθείσα εξίσωση
i) έχει ρίζες ίσες, αν $\lambda = 4$, διότι $\lambda \neq 0$.
ii) έχει ρίζες άνισες αν $\lambda \neq -2$ με $\lambda < 0$ ή $\lambda > 4$.
iii) είναι αδύνατη αν $0 < \lambda < 4$.

5. Το τριώνυμο $x^2 + 3\lambda x + \lambda$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = 9\lambda^2 - 4\lambda$.
Για να είναι $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta < 0$.
Έχουμε $\Delta < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda - 4) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, \frac{4}{9})$.

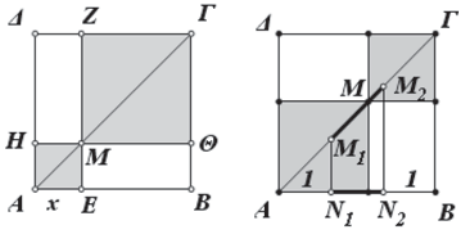
6. i) $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 3\lambda \cdot (\lambda + 2) = 4\lambda^2 - 12\lambda^2 - 24\lambda = -8\lambda^2 - 24\lambda$.
$\Delta < 0 \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 24\lambda < 0 \Leftrightarrow 8\lambda^2 + 24\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda > 0$
$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 3) > 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ ή $\lambda > 0$.

ii) Η ανίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$, $\lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\Delta < 0$ και $\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ ή $\lambda > 0$ και $\lambda < -2$.



Άρα $\lambda < -3$.

7. Αν x είναι η πλευρά του ενός τετραγώνου, τότε η πλευρά του άλλου θα είναι $3 - x$ και άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων θα είναι ίσο με $x^2 + (3 - x)^2 = 2x^2 - 6x + 9$.



Επομένως, για να είναι το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων μικρότερο από 5 θα πρέπει να ισχύει:

$2x^2 - 6x + 9 < 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$

Άρα το Μ θα πρέπει να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία M_1 και M_2, τα οποία χωρίζουν τη διαγώνιο ΑΓ σε τρία ίσα μέρη.

8. i) Η παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - \beta \cdot \alpha + \beta^2$ είναι τριώνυμο ως προς α. Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta = (-\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2 \leq 0$. Ο συντελεστής του α^2 είναι $1 > 0$. Άρα

$$\alpha^2 - \beta \cdot \alpha + \beta^2 \geq 0, \text{ για όλα τα } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Έχουμε $A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta}$. Επομένως

- Αν α, β ομόσημοι, τότε $A > 0$.
- Αν α, β ετερόσημοι, τότε $A < 0$.

§ 4.3. Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

- $2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 3x \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$.
- $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 2$.
- $x^2 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$).

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$2-3x$		+		+	0	–		–	
x^2-x-2		+	0	–		–	0	+	
x^2-x+1		+		+		+		+	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	

2. Έχουμε:

- $-x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.
- $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ ή $x \geq 2$.
- $x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = -3 < 0$).

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$-x^2+4$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-3x+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

3. Έστω $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9)$. Έχουμε:

- $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
- $x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
- $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 3$.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2		$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $(x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1) \cup (3, +\infty)$.

4. Έστω $P(x) = (3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3)$. Έχουμε:

- $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.
- $2x^2 + 6x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 0$.
- $x^2 + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x^2+6x$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2+3		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $(3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0] \cup [3, +\infty)$.

5. Έστω $P(x) = (2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1)$. Έχουμε:

• $2 - x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$.

• $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0$,
οπότε $(x + 1)^2 > 0$, για $x \neq -1$ και $(x + 1)^2 = 0$ για $x = -1$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$2-x-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2+2x+1		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $(2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [1, +\infty)$.

6. Έστω $P(x) = (x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0$. Έχουμε:

• $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

• $2x^2 + x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x + \frac{3}{2})(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$ ή $x \geq 1$.

• $x - 1 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x - 1 \geq 0$, που είναι αδύνατη, αφού $\Delta = -7 < 0$, $\alpha = -2 < 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1-2x^2$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $(x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (1, 3)$.

7. i) $\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2$.

ii) $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x - 3) \leq 0$, με $x \neq 3$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 3$.

8. $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) \leq 0$, με $x^2 + x - 2 \neq 0$.

Έστω $P(x) = (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2)$. Έχουμε:

• $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 2$.

• $x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 1$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+		+	0	–		–	0	+	
$x^2 + x - 2$		+	0	–		–	0	+		+	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Άρα $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1] \cup (1, 2]$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\dfrac{2x + 3}{x - 1} > 4 \Leftrightarrow \dfrac{2x + 3}{x - 1} - 4 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x + 3 - 4x + 4}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x + 7}{x - 1} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x - 7}{x - 1} < 0 \Leftrightarrow (2x - 7)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \dfrac{7}{2}$.

ii) $\dfrac{x - 2}{3x + 5} \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{x - 2}{3x + 5} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - 2 - 12x - 20}{3x + 5} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-11x - 22}{3x + 5} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{11x + 22}{3x + 5} \geq 0 \Leftrightarrow 11(x + 2)(3x + 5) \geq 0$, με $x \neq -\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x > -\dfrac{5}{3}$.

Άρα $x \in (-\infty, -2] \cup (-\dfrac{5}{3}, +\infty)$.

2. $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 1} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x - 10 + 2x - 2}{x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 1} \leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 12)(x - 1) \leq 0$, με $x \neq 1$.

Έστω $P(x) = (x^2 - x - 12)(x - 1)$. Έχουμε:

• $x^2 - x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 4$.

• $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$x^2 - x - 12$		+	0	–	0	–	0	+	
$x - 1$		–		–	0	+		+	
$P(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup (1, 4]$.

3. i) $\dfrac{x}{3x-5} \le \dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-5} - \dfrac{2}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)-2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-6x+10}{(3x-5)(x-1)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-7x+10}{(3x-5)(x-1)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10) \le 0, \text{ με } x \ne 1,\ x \ne \frac{5}{3}.$$

Έστω $P(x) = (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10)$. Έχουμε:

- $3x-5 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{5}{3}$.
- $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.
- $x^2-7x+10 \ge 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2$ ή $x \ge 5$.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		2		5		$+\infty$
$3x-5$		–		–	0	+		+		+	
$x-1$		–	0	+		+		+		+	
$x^2-7x+10$		+		+		+	0	–	0	+	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Άρα $\dfrac{x}{3x-5} \le \dfrac{2}{x-1} \Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10) \le 0$,

$x \ne 1,\ x \ne \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x \in (1, \dfrac{5}{3}) \cup [2, 5]$.

ii) $\dfrac{x}{2x-1} \ge \dfrac{3}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2x-1} - \dfrac{3}{x+2} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-6x+3}{(2x-1)(x+2)} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(2x-1)(x+2)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2) \ge 0, \text{ με } x \ne -2,\ x \ne \frac{1}{2}.$$

Έστω $P(x) = (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		+		+		+	0	–	0	+	
$2x-1$		–		–	0	+		+		+	
$x+2$		–	0	+		+		+		+	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Άρα $x \in (-\infty, -2) \cup (\dfrac{1}{2}, 1] \cup [3, +\infty)$.

4. Έχουμε: $\left|\dfrac{x+1}{x}\right| > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} < -2$ ή $\dfrac{x+1}{x} > 2,\ x \neq 0.$

- $\dfrac{x+1}{x} < -2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} + 2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x} < 0$

$$\Leftrightarrow (3x+1)x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 0.$$

- $\dfrac{x+1}{x} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} < 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Άρα $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right) \cup (0, 1)$.

5. Για να έχει η εταιρεία κέρδος πρέπει να έσοδα να είναι περισσότερα από το κόστος:

$E > K \Leftrightarrow 5x - x^2 > 7 - x \Leftrightarrow 5x - x^2 - 7 + x > 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 7 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 < 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ και $x_2 = 3 + \sqrt{2}$. Επομένως

$$x^2 - 6x + 7 < 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}.$$

ή, προσεγγιστικά, $1{,}59 < x < 4{,}41$.

6. Έχουμε: $\dfrac{20t}{t^2+4} > 4 \Leftrightarrow \dfrac{20t}{t^2+4} - 4 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{20t - 4t^2 - 16}{t^2+4} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-4t^2 + 20t - 16}{t^2+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{4t^2 - 20t + 16}{t^2+4} < 0$$

$$\Leftrightarrow 4(t^2 - 5t + 4)(t^2 + 4) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 4.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 5.1. Ακολουθίες

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) 3, 5, 7, 9, 11 ii) 2, 4, 8, 16, 32

iii) 2, 6, 12, 20, 30 iv) 0, 1, 2, 3, 4

v) 1, –0,1, 0,01, –0,001, 0,0001 vi) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{15}{16}, \frac{33}{32}$

vii) 4, 3, 2, 1, 0 viii) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ix) 2, 1, $\frac{8}{9}$, 1, $\frac{32}{25}$ x) 1, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

xi) 1, –1, 1, –1, 1.

2. i) 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2 ii) 0, 1, 2, 5, 26

iii) 3, 4, 6, 10, 18.

3. i) Έχουμε $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = (\nu + 1) + 5 - \nu - 5 = 1$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ \alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu. \end{cases}$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 2$ και $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{2^{\nu+1}}{2^\nu} = 2$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu. \end{cases}$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = 2^{\nu+1} - 1 = 2 \cdot 2^\nu - 1 = 2 \cdot (1 + \alpha_\nu) - 1$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1. \end{cases}$

iv) Έχουμε $\alpha_1 = 8$ και $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu + 1) + 3 - 5\nu - 3 = 5$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 8 \\ \alpha_{\nu+1} = 5 + \alpha_\nu \end{cases}$

4. i) Έχουμε $\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = \alpha_1 + 2$
$\alpha_3 = \alpha_2 + 2$
.....
$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 2$

Προσθέτουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη και βρίσκουμε:

$\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)2$ ή $\alpha_\nu = 2\nu - 1$.

ii) $\alpha_1 = 3$
$\alpha_2 = 5\alpha_1$
$\alpha_3 = 5\alpha_2$
.....
$\alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1}$.

Πολλαπλασιάζουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη και βρίσκουμε:
$\alpha_\nu = 3 \cdot 5^{\nu-1}$

§ 5.2. Αριθμητική πρόοδος
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\alpha_\nu = 7 + (\nu - 1) \cdot 3 = 3\nu + 4$

ii) $\alpha_\nu = 11 + (\nu - 1)2 = 2\nu + 9$

iii) $\alpha_\nu = 5 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu + 8$

iv) $\alpha_\nu = 2 + (\nu - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}$

v) $\alpha_\nu = -6 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu - 3$.

2. i) $\alpha_{15} = -2 + (15 - 1) \cdot 5 = 68$

ii) $\alpha_{20} = 11 + (20 - 1) \cdot 7 = 144$

iii) $\alpha_{30} = 4 + (30 - 1) \cdot 11 = 323$

iv) $\alpha_{35} = 17 + (35 - 1) . 8 = 289$

v) $\alpha_{50} = 1 + (50 - 1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{101}{3}$

vi) $\alpha_{47} = \frac{1}{2} + (47 - 1) \cdot \frac{3}{4} = 35$.

3. i) Έχουμε $\alpha_6 = \alpha_1 + 5\omega$, επομένως $\alpha_1 + 5\omega = 12$ και $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega$, επομένως $\alpha_1 + 9\omega = 16$.

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 + 5\omega = 12 \\ \alpha_1 + 9\omega = 16 \end{cases}$

βρίσκουμε $\boldsymbol{\omega = 1}$ και $\boldsymbol{\alpha_1 = 7}$.

ii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = 14 \\ \alpha_1 + 11\omega = 42 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\omega = 4} \text{ και } \boldsymbol{\alpha_1 = -2}.$$

iii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 20 \\ \alpha_1 + 6\omega = 32 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\omega = 3} \text{ και } \boldsymbol{\alpha_1 = 14}.$$

4. i) Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = -5 \\ \alpha_1 + 14\omega = -2 \end{cases}$

από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε ότι

$$\omega = \frac{3}{10} = 0{,}3 \text{ και } \alpha_1 = -6{,}2$$

Άρα $\alpha_{50} = \alpha_1 + 49\omega = -6{,}2 + 49 \cdot 0{,}3 = 8{,}5$.

ii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 6\omega = 55 \\ \alpha_1 + 21\omega = 145 \end{cases}$

οπότε $\omega = 6$ και $\alpha_1 = 19$

Άρα $\alpha_{18} = \alpha_1 + 17\omega = 19 + 17 \cdot 6 = \mathbf{121}$.

5. i) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε

$$97 = 2 + (\nu - 1)5 \Leftrightarrow 2 + (\nu - 1)5 = 97$$
$$\Leftrightarrow 5\nu = 100 \Leftrightarrow \nu = 20.$$

Επομένως ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{20}, δηλαδή ο 20ος.

ii) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε

$$-97 = 80 + (\nu - 1)(-3) \Leftrightarrow 80 + (\nu - 1)(-3) = -97$$
$$\Leftrightarrow -3\nu = -180 \Leftrightarrow \nu = 60$$

Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο $\boldsymbol{\alpha_{60}}$.

6. i) $\dfrac{10 - 40}{2} = \dfrac{-30}{2} = \mathbf{-15}$

ii) $\dfrac{(5x + 1) + 11}{2} = 3x - 2 \Leftrightarrow 5x + 12 = 6x - 4 \Leftrightarrow -x = -16 \Leftrightarrow \mathbf{x = 16}$.

7. Αν είναι x ο μεγαλύτερος αριθμός και y ο μικρότερος τότε ισχύει:

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \dfrac{x + y}{2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι $\mathbf{x = 30}$ και $\mathbf{y = 20}$.

8. i) Έχουμε $\alpha_1 = 7$, $\omega = 9 - 7 = 2$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 7 + (40 - 1) \cdot 2] = 20 \cdot 92 = \mathbf{1840}$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 0$, $\omega = 2$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 0 + (40 - 1) \cdot 2] = 20 \cdot 78 = \mathbf{1560}$$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = 6$, $\omega = 4$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 6 + (40 - 1) \cdot 4] = 20 \cdot 168 = \mathbf{3360}$$

iv) Έχουμε $\alpha_1 = -7$, $\omega = 5$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot (-7) + (40 - 1) \cdot 5] = 20 \cdot 181 = \mathbf{3620}.$$

9. i) Έχουμε $\alpha_1 = 2$, $\omega = -3$ και $\nu = 80$, οπότε

$$S = \frac{80}{2} \cdot [2 \cdot 2 + (80 - 1)(-3)] = 40 \cdot (-233) = \mathbf{-9320}$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$, $\omega = \frac{2}{3}$ και $\nu = 80$, οπότε

$$S = \frac{80}{2} \cdot [2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (80 - 1) \cdot \frac{2}{3}] = 40 \cdot 52 = \mathbf{2080}.$$

10. Καθένα από τα αθροίσματα είναι άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου.

i) Έχουμε $\alpha_1 = 1$, $\alpha_\nu = 197$ και $\omega = 4$.
Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ οπότε $197 = 1 + (\nu - 1) \cdot 4$ ή $\nu = 50$.
Επομένως

$$S = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{50}{2}(1 + 197) = \mathbf{4950}.$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 9$, $\omega = 3$, $\alpha_\nu = 90$. Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $90 = 9 + (\nu - 1) \cdot 3$ ή $\nu = 28$.
Επομένως

$$S_{28} = \frac{28}{2}(9 + 90) = 14 \cdot 99 = \mathbf{1386}.$$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = -7$, $\omega = -3$, και $\alpha_\nu = -109$. Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $-109 = -7 + (\nu - 1)(-3)$ ή $\nu = 35$.
Επομένως

$$S_{35} = \frac{35}{2}(-7 - 109) = \frac{35}{2} \cdot (-116) = \mathbf{-2030}.$$

11. i) Έχουμε $\alpha_1 = 4$, $\omega = 4$ και $S_\nu = 180$.

Επειδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$, έχουμε

$$180 = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 4 + (\nu - 1) \cdot 4] \Leftrightarrow 180 = \frac{\nu}{2}(4\nu + 4)$$
$$\Leftrightarrow 4\nu^2 + 4\nu = 360$$
$$\Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$$
$$\Leftrightarrow \nu = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} 9 \\ -10 \end{cases}$$

Επειδή $\nu \in \mathbb{N}^*$, έπεται ότι $\boldsymbol{\nu = 9}$. Άρα πρέπει να πάρουμε τους 9 πρώτους όρους.

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 5$, $\omega = 5$ και $S_\nu = 180$. Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι $\boldsymbol{\nu = 8}$.

12. Έχουμε $\alpha_1 = 53$, $\omega = -2$ και $\nu = 15$.
Επομένως $\alpha_{15} = 53 + (15 - 1)(-2) = 53 - 28 = \mathbf{25}$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(25 + 53) = \frac{15}{2} \cdot 78 = \mathbf{585}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 12 - 4(\nu + 1) - 12 + 4\nu$
$= 12 - 4\nu - 4 - 12 + 4\nu = -4.$

Επομένως $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 4$ που σημαίνει ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\mathbf{-4}$ και $\alpha_1 = 12 - 4 \cdot 1 = \mathbf{8}$.

2. i) Οι περιττοί αριθμοί είναι οι 1, 3, 5, 7 ... και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$.
Έχουμε $\alpha_{200} = 1 + (200 - 1) \cdot 2 = 399$, οπότε

$$S_{200} - \frac{200}{2} \cdot (1 + 399) = 100 \cdot 400 = \mathbf{40000}.$$

ii) Οι άρτιοι αριθμοί είναι οι 2, 4, 6, 8 ... και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 2$.
Έχουμε $\alpha_{300} = 2 + (300 - 1)2 = 600$, οπότε

$$S_{300} - \frac{300}{2} \cdot (2 + 600) = 150 \cdot 602 = \mathbf{90300}.$$

iii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το 17 + 19 + ... + 379 και οι προσθετέοι του, με τη σειρά που είναι γραμμένοι, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 17$, $\omega = 2$ και $\alpha_\nu = 379$.

Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε $379 = 17 + (\nu - 1)2$ ή $\nu = 182$.
Επομένως

$$S_{182} - \frac{182}{2}(17 + 379) = 91 \cdot 396 = \mathbf{36036}.$$

3. i) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $5 + 10 + 15 + ... + 195$ και οι προσθετέοι του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 5$, $\omega = 5$ και $\alpha_\nu = 195$.
Από το τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $195 = 5 + (\nu - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow \nu = 39$.
Επομένως

$$S_{39} = \frac{39}{2}(5 + 195) = 39 \cdot 100 = \mathbf{39000}.$$

ii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $12 + 15 + ... + 198$ και οι προσθετέοι του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 12$, $\omega = 3$ και $\alpha_\nu = 198$.
Από το τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $198 = 12 + (\nu - 1) \cdot 3$ ή $\nu = 63$.
Επομένως

$$S_{63} = \frac{63}{2}(12 + 198) = \frac{63}{2} \cdot 210 = 63 \cdot 105 = \mathbf{6615}.$$

4. i) Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu + 1) - 4 - 5\nu + 4 = 5$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5$.
Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1$, $\omega = 5$ και $\alpha_{30} = 5 \cdot 30 - 4 = 146$, οπότε

$$S_{30} = \frac{30}{2}(1 + 146) = 15 \cdot 147 = \mathbf{2205}.$$

ii) Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -5(\nu + 1) - 3 + 5\nu + 3$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 5$.
Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = -5 \cdot 1 - 3 = -8$, $\omega = -5$ και $\alpha_{40} = -5 \cdot 40 - 3 = -203$, οπότε

$$S_{40} = \frac{40}{2}(-8 - 203) = 20 \cdot (-201) = \mathbf{-4220}.$$

5. Πρέπει από το άθροισμα $1 + 2 + 3 + ... + 200$ να αφαιρέσουμε το άθροισμα $4 + 8 + 12 + ... + 200$ των πολλαπλασίων του 4 και το άθροισμα $9 + 18 + 27 + ... + 198$ των πολλαπλασίων του 9.
Όμως στα πολλαπλάσια του 4 και του 9 περιέχονται και τα πολλαπλάσια του 36 που, με αυτόν τον τρόπο, αφαιρούνται δυο φορές. Πρέπει λοιπόν να προσθέσουμε μια φορά τα πολλαπλάσια του 36 για να βρούμε το πραγματικό άθροισμα. Επομένως

$S = (1 + 2 + 3 + ... + 200)(4 + 8 + 12 + ... + 200) - (9 + 18 + 27 + ... + 198 + + (36 + 72 + ... + 180)$.

Κατά τα γνωστά έχουμε:

$1 + 2 + 3 + ... + 200 = \frac{200}{2}(1 + 200) = 100 \cdot 201 = 20100$

$4 + 8 + 12 + ... + 200 = \frac{50}{2}(4 + 200) = 25 \cdot 204 = 5100$

$9 + 18 + ... + 198 = \frac{22}{2}(9 + 198) = 11 \cdot 207 = 2277$

$36 + 72 + ... + 180 = \frac{5}{2}(36 + 180) = \frac{5}{2} \cdot 216 = 5 \cdot 108 = 540$

Άρα $S = 20100 - 5100 - 2277 + 540 = \mathbf{13263}$.

6. Το άθροισμα ν όρων της ακολουθίας είναι

$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$ ή $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2]$.

Πρέπει $S_\nu > 400 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2] > 400$

$\Leftrightarrow \nu^2 > 400$
$\Leftrightarrow \nu > 20$.

7. Για την 1η γραμμή του πίνακα έχουμε:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 + (12 - 1)(-10) = 120 - 110 = \mathbf{10}$.

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{12}{2}(120 + 10) = 6 \cdot 130 = \mathbf{780}$.

Για την 2η γραμμή έχουμε:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $109 = 5 + (27 - 1)\omega$ ή $\boldsymbol{\omega = 4}$.

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{27}{2}(5 + 109) = \frac{27}{2} \cdot 114 = \mathbf{1539}$.

Για την 3η γραμμή έχουμε:

$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$ ή $210 = \frac{12}{2}[2\alpha_1 + 11 \cdot 3]$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = 1}$.

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $\alpha_\nu = 1 + 11 \cdot 3$ ή $\boldsymbol{\alpha_\nu = 34}$.

Για την 4η γραμμή έχουμε:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $-8 = \alpha_1 + 15 \cdot 2$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = -38}$.

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ ή $S_\nu = \frac{16}{2}(-38 - 8) = 8 \cdot (-46) = \mathbf{-368}$.

8. Τις πρώτες 12 ώρες το πλήθος των κτύπων είναι

$1 + 2 + 3 + ... + 12 = \frac{12}{2}(1 + 12) = 6 \cdot 13 = 78$, άρα συνολικά ακούγονται $2 \cdot 78 = 156$ κτυπήματα.

9. Το πλήθος των θέσεων κάθε σειράς καθισμάτων σχηματίζει αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 800$ και $\alpha_{33} = 4160$. Επομένως, λόγω της $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, είναι $4160 = 800 + (33 - 1) \cdot \omega$ ή $\omega = 105$. Το στάδιο έχει συνολικά:

$$S_{33} = \frac{33}{2}(800 + 4160) = \frac{33}{2} \cdot 4960 = 33 \cdot 2480 = \mathbf{81840} \text{ θέσεις.}$$

Η μεσαία σειρά, δηλαδή η 17η σειρά έχει

$$\alpha_{17} = 800 + (17 - 1) \cdot 105 = 800 + 16 \cdot 105 = \mathbf{2480} \text{ θέσεις.}$$

10. Οι όροι της ακολουθίας διαδοχικά θα είναι

$$3, x_1, x_2, ..., x_{10}, 80$$

συνολικά 12 όροι.

Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $80 = 3 + 11\omega$ ή $\omega = 7$, οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73.$$

11. Έχουμε

$$1 + \frac{\nu - 1}{\nu} + \frac{\nu - 2}{\nu} + \frac{\nu - 3}{\nu} + ... + \frac{1}{\nu} = \frac{\nu + (\nu - 1) + (\nu - 2) + ... + 1}{\nu} =$$

$$= \frac{\frac{\nu(\nu + 1)}{2}}{\nu} = \mathbf{\frac{\nu + 1}{2}}.$$

12. Το 1ο μέτρο θα κοστίσει 20€.
Το 2ο μέτρο θα κοστίσει 25€.
Το 3ο μέτρο θα κοστίσει 30€. κ.τ.λ.
Αν λοιπόν η γεώτρηση πάει ν μέτρα βάθος, τότε το συνολικό κόστος, σύμφωνα με τον τύπο $S_\nu = \frac{(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega)\nu}{2}$, θα είναι ίσο με:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 20 + (\nu - 1)5].$$

Πρέπει επομένως

$$\frac{\nu}{2}[2 \cdot 20 + (\nu - 1)5] \leq 4.700 \Leftrightarrow 20\nu + 2{,}5\nu(\nu - 1) \leq 4.700$$

$$\Leftrightarrow 8\nu + \nu(\nu - 1) \leq 1880$$
$$\Leftrightarrow \nu^2 + 7\nu - 1880 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (\nu - 40)(\nu + 47) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -47 \leq \nu \leq 40$$

Άρα η γεώτρηση μπορεί να πάει 40m βάθος.

§ 5.3. Γεωμετρική πρόοδος
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}$, ii) $\alpha_\nu = \frac{2}{3} \cdot 3^{\nu-1} = 2 \cdot 3^{\nu-2}$, iii) $\alpha_\nu = 9 \cdot 3^{\nu-1} = 3^{\nu+1}$,

iv) $\alpha_\nu = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2^{\nu+1}}$, v) $\alpha_\nu = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = 2^4 \cdot \frac{1}{2^{\nu-1}} = \frac{1}{2^{\nu-5}}$,

vi) $\alpha_\nu = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1} = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^{\nu-1}} = \frac{2}{3^{\nu-3}}$, vii) $\alpha_\nu = 1 \cdot (0{,}4)^{\nu-1} = 0{,}4^{\nu-1}$,

viii) $\alpha_\nu = (-2) \cdot (-2)^{\nu-1} = (-2)^\nu$, ix) $\alpha_\nu = (-3) \cdot (-3)^{\nu-1} = (-3)^\nu$.

2. i) $\alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot 2^8 = 64$, ii) $\alpha_7 = 2 \cdot 3^6 = 1458$, iii) $\alpha_8 = 729 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{3}$,

iv) $\alpha_{10} = 1 \cdot (-2)^9 = -512$, v) $\alpha_9 = \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^8}{2^8} = \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$.

3. i) $\frac{32}{3} = \alpha_1 \cdot 2^5$ ή $\alpha_1 = \frac{32}{3 \cdot 2^5} = \frac{1}{3}$,

ii) $\frac{27}{128} = \alpha_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ ή $\frac{3^3}{2^7} = \alpha_1 \cdot \frac{3^3}{2^6}$, άρα $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

4. i) $\begin{cases} 12 = \alpha_1 \cdot \lambda^2 \\ 96 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^5}{\alpha_1\lambda^2} = \frac{96}{12}$ ή $\lambda^3 = 8$, άρα $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

ii) $\begin{cases} \frac{8}{3} = \alpha_1 \cdot \lambda \\ \frac{64}{81} = \alpha_1 \cdot \lambda^4 \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ ή $\lambda^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, άρα $\boldsymbol{\lambda = \frac{2}{3}}$.

5. i) $\begin{cases} 125 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 \\ \frac{125}{64} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^9}{\alpha_1\lambda^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$, ή $\lambda^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$, άρα $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

Για $\lambda = \frac{1}{2}$ έχουμε $125 = \alpha_1 \cdot \frac{1}{2^3}$ ή $\alpha_1 = 125 \cdot 2^3 = 1000$.

Έχουμε τώρα $\alpha_{14} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1000}{8192}$.

Για $\lambda = -\frac{1}{2}$ εργαζόμαστε ομοίως.

ii) $\begin{cases} \sqrt{2} = \alpha_1 \cdot \lambda^{12} \\ 32\sqrt{2} = \alpha_1 \cdot \lambda^{22} \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^{22}}{\alpha_1\lambda^{12}} = \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ή $\lambda^{10} = 2^5$ ή $\lambda = \pm\sqrt{2}$.

Για $\lambda = \sqrt{2}$ έχουμε $\sqrt{2} = \alpha_1 \cdot 2^6$ ή $\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2^6}$.

Έχουμε τώρα $\alpha_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2^6} \cdot 2^{10} = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

Για $\lambda = -\sqrt{2}$ εργαζόμαστε ομοίως.

6. Έστω α_ν ο όρος που ισούται με 768. Τότε $768 = 3 \cdot 2^{\nu-1}$ ή $2^{\nu-1} = 256$ ή $2^{\nu-1} = 2^8$, οπότε $\nu - 1 = 8$, άρα $\boldsymbol{\nu = 9}$.

7. i) Ο νος όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = 4 \cdot 2^{\nu-1}$.
Αν $4 \cdot 2^{\nu-1} > 2000$, τότε $2^{\nu+1} > 2000$. Έχουμε $2^{10} = 1024$ και $2^{11} = 2048$.
Άρα πρέπει $\nu + 1 > 10$ ή $\nu > 9$.
Επομένως ο πρώτος όρος που υπερβαίνει το 2000 είναι ο 10ος όρος.

ii) Ο νος όρος της προόδου είναι $\alpha\nu = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$.

Αν $128 \cdot \frac{1}{2^{\nu-1}} < 0{,}25$, τότε $2^{\nu-1} > \frac{128}{0{,}25}$ ή $2^{\nu-1} > 512$.
Έχουμε $2^8 = 256$ και $2^9 = 512$.
Άρα πρέπει $\nu - 1 > 9$ ή $\nu > 10$.
Επομένως ο πρώτος όρος που είναι μικρότερος του 512 είναι ο 11ος.

8. i) $\sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$, $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{1} = \mathbf{1}$.

ii) Ισχύει
$(x + 1)^2 = (x - 4)(x - 19) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 23x + 76$
$\Leftrightarrow 25x = 75$
$\Leftrightarrow \mathbf{x = 3}$.

9. i) $S_{10} = 1 \cdot \dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \mathbf{1023}$.

ii) $S_{10} = 3 \cdot \dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 3 \cdot \dfrac{59048}{2} = 3 \cdot 29524 = \mathbf{88572}$.

iii) $S_{10} = -4 \cdot \dfrac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = -4 \cdot \dfrac{1023}{-3} = 4 \cdot 341 = \mathbf{1364}$.

10. i) Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu - 1}$ έχουμε $8192 = 2 \cdot 4^{\nu - 1}$ ή $4^{\nu - 1} = 4096 = 4^6$, άρα $\nu - 1 = 6$ ή $\nu = 7$.

Επομένως $S_7 = 2 \cdot \dfrac{4^7 - 1}{4 - 1} = 2 \cdot \dfrac{16383}{3} = 2 \cdot 5461 = \mathbf{10922}$.

ii) Ομοίως από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu - 1}$ έχουμε $\dfrac{1}{512} = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu - 1}$ ή

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu - 1} = \dfrac{1}{2048} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}$, άρα $\nu - 1 = 11$ ή $\nu = 12$.

Επομένως

$$S_{12} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{4096} - 1}{-\frac{1}{2}} 4 \cdot \frac{\frac{4095}{4096}}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 4095}{4096} = \frac{4095}{512} \approx 8.$$

iii) Ομοίως από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu - 1}$ έχουμε $256 = 1 \cdot (-2)^{\nu - 1}$ ή $(-2)^8 = (-2)^{\nu - 1}$, άρα $\nu - 1 = 8$ ή $\nu = 9$.

Επομένως

$$S_9 = 1 \cdot \frac{(-2)^9 - 1}{-2 - 1} = \frac{-513}{-3} = \mathbf{171}.$$

11. Έχουμε $\alpha_1 = 3$ και,

σε 1 ώρα $\alpha_2 = 3 \cdot 2$

σε 2 ώρες $\alpha_3 = 3 \cdot 2^2$

σε 3 ώρες $\alpha_4 = 3 \cdot 2^3$ κτλ. και,

σε 12 ώρες $\alpha_{13} = 3 \cdot 2^{12} = \mathbf{12288}$ βακτηρίδια.

12. Έχουμε $\alpha_1 = 60$ και,

μετά την 1η αναπήδηση $\alpha_2 = 60 \cdot \dfrac{1}{3}$

μετά την 2η αναπήδηση $\alpha_3 = 60 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

μετά την 3η αναπήδηση $\alpha_4 = 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$

μετά την 4η αναπήδηση $\alpha_5 = 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{60}{81} = \frac{20}{27} \approx 0{,}74\text{m}.$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{2^{\nu+1}}{3^{\nu+2}}}{\frac{2^\nu}{3^{\nu+1}}} = \frac{2^{\nu+1} \cdot 3^{\nu+1}}{2^\nu \cdot 3^{\nu+2}} = \frac{2}{3}$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \frac{2}{3}$.

Επομένως η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = \mathbf{\frac{2}{3}}$ και $\alpha_1 = \mathbf{\frac{2}{9}}$.

2. Πρέπει

$$\left(\sqrt[4]{10\nu+4}\right)^2 = \sqrt{\nu-5} \cdot \sqrt{\nu+2} \Leftrightarrow \sqrt{10\nu+4} = \sqrt{(\nu-5)(\nu+2)}$$
$$\Leftrightarrow (\nu-5)(\nu+2) = 10\nu+4$$
$$\Leftrightarrow \nu^2 - 13\nu - 14 = 0$$
$$\Leftrightarrow \nu = \frac{13 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{13 \pm 15}{2} = \begin{cases} 14 \\ -1 \end{cases}$$

Με δοκιμή βρίσκουμε ότι μόνο η τιμή **ν = 14** είναι δεκτή.

3. i) Έστω μια γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ. Τότε οι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1,\quad \alpha_1\lambda,\quad \alpha_1\lambda^2,\quad \alpha_1\lambda^3,\quad \ldots,\quad \alpha_1\lambda^\nu,\quad \ldots$$

και τα τετράγωνα των όρων αυτών είναι:

$$\alpha_1^2,\quad \alpha_1^2\lambda^2,\quad \alpha_1^2\lambda^4,\quad \alpha_1^2\lambda^6,\quad \ldots\quad \alpha_1^2\lambda^{2\nu}.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο α_1^2 και λόγο λ^2.

ii) Αν υψώσουμε τους όρους της προόδου στην k έχουμε:

$$\alpha_1^k,\quad \alpha_1^k\lambda^k,\quad \alpha_1^k\lambda^{2k},\quad \alpha_1^k\lambda^{3k},\quad \ldots\quad \alpha_1^k\lambda^{\nu k}$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο α_1^k και λόγο λ^k.

4. i) Έχουμε $\alpha_1 + \alpha_1\lambda = 3 + \sqrt{3}$ (1) και $\alpha_1 \cdot \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 4(3 + \sqrt{3})$ (2).

Οι (1) και (2) σχηματίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda + 1) = 3 + \sqrt{3} \\ \alpha_1(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1) = 4(3 + \sqrt{3}). \end{cases}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος προκύπτει

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda + 1) - 3(\lambda + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = \sqrt{3} \text{ ή } \lambda = -\sqrt{3}.$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές του λ στην (1) και έχουμε

Για $\lambda = -1$, $\alpha_1 \cdot 0 = 3 + \sqrt{3}$ (αδύνατο)

Για $\lambda = \sqrt{3}$, $\alpha_1(\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$ ή $\alpha_1 = \sqrt{3}$

Για $\lambda = -\sqrt{3}$, $\alpha_1(1 - \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = -(3 + 2\sqrt{3})}$.

5. Έχουμε $\alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^5 = 34 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda(\lambda^4 + 1) = 34$ (1)

και $\alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^6 = 68 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2(\lambda^4 + 1) = 68$ (2)

Με διαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε $\lambda = 2$, οπότε με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε $\alpha_1 = 1$.

Άρα $$S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1024 - 1 = \mathbf{1023}.$$

6. Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια από σήμερα, τότε τον επόμενο χρόνο, δηλαδή ύστερα από ν + 1 χρόνια από σήμερα, θα είναι (σε εκατομμύρια).

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{2}{100} \cdot \alpha_\nu = 1{,}02 \cdot \alpha_\nu.$$

Άρα ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu+1} = 1{,}02 \cdot \alpha_\nu}.$$

Επειδή $\alpha_1 = 90 \cdot 1{,}02$ και $\alpha_{\nu+1} = 1{,}02 \cdot \alpha_\nu$ η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο $\alpha_1 = 90 \cdot 1{,}02$ και λόγο $\lambda = 1{,}02$, επομένως

$$\alpha_\nu = 90 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02^{\nu-1} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha_\nu = 90 \cdot 1{,}02^\nu}.$$

Ύστερα από 10 χρόνια ο πλυθυσμός της χώρας θα είναι

$$\alpha_{10} = 90 \cdot 1{,}02^{10} \approx 90 \cdot 1{,}22 \text{ ή } 109800000 \text{ κάτοικοι.}$$

7. Αν I_ν είναι η ένταση του φωτός αφού διέλθει μέσα από ν φίλτρα, τότε η έντασή του αφού διέλθει και μέσα από το επόμενο φίλτρο, δηλαδή αφού διέλθει συνολικά μέσα από ν + 1 φίλτρα θα είναι

$$I_{\nu+1} = I_\nu - \frac{10}{100} I_\nu = 0{,}9 I_\nu.$$

Άρα ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι

$$I_{\nu+1} = 0{,}9 \cdot I_\nu.$$

Επειδή $I_1 = I_0 \cdot 0{,}9$ και $I_{\nu+1} = 0{,}9 \cdot I_\nu$ η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο $I_0 \cdot 0{,}9$ και λόγο $\lambda = 0{,}9$, άρα $I_\nu = I_0 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$ ή

$$\mathbf{I_\nu = I_0 \cdot 0{,}9^\nu}.$$

Για $\nu = 10$ έχουμε $I_{10} = I_0 \cdot 0{,}9^{10} \approx 0{,}35 \cdot I_0$.

8. i) Οι 11 ενδιάμεσοι τόνοι με τους δύο ακραίους C΄ και **C΄΄** θα σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 261$ και $\alpha_{13} = 522$.

Επειδή $\alpha_{13} = \alpha_1 \cdot \lambda^{12}$ έχουμε $522 = 261 \cdot \lambda^{12}$ και επομένως $\boldsymbol{\lambda = \sqrt[12]{2}}$.

ii) Η συχνότητα του 5ου τόνου θα είναι $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 261 \cdot \sqrt[12]{\mathbf{2^5}}$.

9. i) Αν D_ν είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμόσουμε τη διαδικασία ν φορές, τότε η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία μια ακόμα φορά, δηλαδή ν + 1 συνολικά φορές θα είναι

$$D_{\nu+1} = D_\nu - \frac{D_\nu}{40} \cdot 4 = D_\nu - 0{,}1 \cdot D_\nu = (1 - 0{,}1)D_\nu = 0{,}9D_\nu.$$

Επομένως $D_{\nu+1} = 0{,}9D_\nu$ και $D_1 = 36$ όσο το νερό που μένει την 1η φορά. Βλέπουμε ότι η ακολουθία D_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με $D_1 = 36$ και λόγο $\lambda = 0{,}9$, άρα $D_\nu = 36 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$.

ii) $D_7 = 36 \cdot 0{,}9^6 \approx 19{,}13$, οπότε η ποσότητα του αντιπυκτικού είναι περίπου $40 - 19{,}13 = \mathbf{20{,}87\ell}$.

10. Αφού διπλασιάζουμε κάθε φορά τον ρυθμό των κόκκων του ρυζιού έχουμε $\alpha_{\nu+1} = 2 \cdot \alpha_\nu$.

Επειδή στο 1ο τετραγωνάκι βάζουμε 1 κόκκο ρύζι έχουμε $\alpha_1 = 1$.

Επομένως η ακολουθία αν, είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$, άρα

$$\alpha_\nu = 1 \cdot 2^{\nu-1} \quad \text{ή} \quad \alpha_\nu = 2^{\nu-1}.$$

Συνολικά σε όλα τα τετραγωνάκια πρέπει να μπουν

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \text{ κόκκοι ρύζι.}$$

Το ρύζι αυτό είναι περίπου σε κιλά

$$\frac{2^{64} - 1}{20000} \cong \frac{1{,}8447 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 10^4} = 0{,}9223 \cdot 10^{15} = 9{,}223 \cdot 10^{14} \text{ κιλα} = 9{,}223 \cdot 10^{11} \text{ τόνοι.}$$

11. i) Έχουμε $S_1 = 3$

$S_2 = 3 \cdot 4 = 12$

$S_3 = 12 \cdot 4 = 48$

Παρατηρούμε ότι το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος προκύπτει από το πλήθος των πλευρών του προηγούμενου σχήματος με πολλαπλασιασμό επί 4. Επομένως $S_{\nu+1} = 4 \cdot S_\nu$, οπότε

$S_1 = 3$ Πολλαπλασιάζουμε
$S_2 = 4S_1$ τις ισότητες αυτές κατά μέλη
$S_3 = 4S_2$ και έχουμε
..... $S_\nu = 3 \cdot 4^{\nu - 1}$
$S_\nu = 4S_{\nu - 1}$

ii) Έχουμε $U_1 = 3 \cdot 1 = 3$

$$U_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$$

$$U_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9} = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$U_{\nu + 1} = U_\nu \cdot \frac{4}{3}.$$

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι $U_\nu = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu - 1}$.

§ 5.4. Ανατοκισμός - Ίσες καταθέσεις

1. $\alpha_5 = 5.000(1 + \frac{20}{100})^5 = 5.000 \cdot (1{,}05)^5 = 5.000 \cdot 1{,}27628 = 6381{,}4$€.

2. $\alpha_{10} = \alpha(1 + \tau)^{10} \Leftrightarrow 50.000 = \alpha(1 + \frac{3}{100})^{10}$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1{,}03^{10} = 50.000$$
$$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1{,}34391 = 50.000$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{50}{1{,}34391} = 37.204{,}87€.$$

3. $\alpha_5 = (1 + \tau)^5 \Leftrightarrow 12.762 = 10.000(1 + \tau)^5$

$$\Leftrightarrow (1 + \tau)^5 = \frac{12.762}{10.000}$$
$$\Leftrightarrow (1 + \tau)^5 = 1{,}2762$$
$$\Leftrightarrow 1 + \tau = 1{,}05$$
$$\Leftrightarrow \tau = 0{,}05 = 5\%.$$

4. $\sum = 5.000(1 + \frac{3}{100}) \cdot \frac{(1 + (3 / 100))^5 - 1}{3 / 100}$

$$= 5.000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{3 / 100}$$
$$= 5.000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{0{,}159274}{0{,}03} \approx 27.342{,}05€.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 6.1. Η έννοια της συνάρτησης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Πρέπει $x - 1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το: $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Πρέπει $x^2 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 4$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το:
$\mathbb{R} - \{0,4\} = (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, -\infty)$.

iii) Πρέπει $x^2 + 1 \neq 0$ που ισχύει πάντοτε. Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathbb{R}$.

iv) Πρέπει $|x| + x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x \Leftrightarrow x > 0$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $(0, +\infty)$.

2. i) Πρέπει: $x - 1 \geq 0$ και $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[1, 2]$.

ii) Πρέπει $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$
αφού οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4$ είναι οι αριθμοί -2 και 2.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

iii) Ομοίως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[1, 3]$ αφού οι ρίζες του τριωνύμου και οι αριθμοί 1 και 3.

iv) Πρέπει $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ και $x \neq 1$.
Άρα, το πειδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο
$[0, +\infty) - \{1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. Είναι
$f(-5) = (-5)^3 = -125$.
$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.
$f(6) = 2 \cdot 6 + 3 = 15$.

4. i) Έστω x ο ζητούμενος φυσικός αριθμός. Τότε, ο τύπος της συνάρτησης θα προκύψει ως εξής:

$$x \xrightarrow{+1} x+1 \xrightarrow{\cdot 4} (x+1)\cdot 4 \xrightarrow{+x^2} (x+1)\,4 + x^2.$$

Επομένως, θα ειναι $f(x) = (x+1)4 + x^2 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

δηλαδή $f(x) = (x+2)^2$, $x \in \mathbb{N}$. (1)

Έτσι θα έχουμε $f(0) = 2^2 = 4$, $f(1) = 3^2 = 9$, $f(2) = 4^2 = 16$ και $f(3) = 5^2 = 25$.

ii) Επειδή $x > 0$, έχουμε:

- ✓ $f(x) = 36 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 6^2 \Leftrightarrow x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4$.
- ✓ $f(x) = 49 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 7^2 \Leftrightarrow x = 5$.
- ✓ $f(x) = 100 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 10^2 \Leftrightarrow x = 8$.
- ✓ $f(x) = 144 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 12^2 \Leftrightarrow x = 10$.

5. i) Για $x \neq 1$ έχουμε:

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} + 5 = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\,(x-1) = 4 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

ii) Για $x \neq 0, 4$ έχουμε:

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2-16}{x^2-4x} = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x} = 2$$

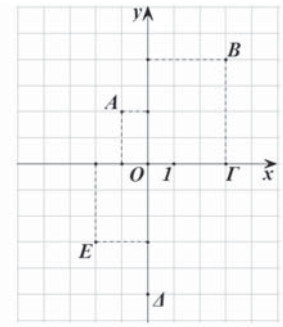
$$\Leftrightarrow x + 4 = 2x \Leftrightarrow x = 4, \text{ αδύνατη.}$$

iii) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$h(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2.$$

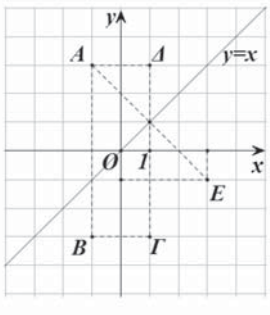
§ 6.2. Γραφική παράσταση συνάρτησης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Τα σημεία είναι αποτυπωμένα στο διπλανό σχήμα.



2. Πρέπει $2 < x < 5$ και $1 < y < 6$.

3. Το συμμετρικό του Α(–1, 3),
i) ως προς τον άξονα x΄x είναι το Β(–1, –3)
ii) ως προς τον άξονα y΄y είναι το Δ(1, 3)
iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ είναι το Ε(3, –1)
iv) ως προς την αρχή των αξόνων είναι το Γ(1, –3).



4. Με βάση τον τύπο $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ της απόστασης των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχουμε

i) $(OA) = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

ii) $(AB) = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

iii) $(AB) = \sqrt{(1+3)^2 + 0^2} = 4$.

iv) $(AB) = \sqrt{0^2 + (4+1)^2} = 5$.

5. i) Είναι

$(AB) = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$(A\Gamma) = \sqrt{(-3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

$(B\Gamma) = \sqrt{(-3-4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{2 \cdot 7^2 +} = 7\sqrt{2}$.

Άρα, (ΑΒ) = (ΑΓ), οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Α.

ii) Είναι

$(AB) = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}$, οπότε $(AB)^2 = 8$.

$(A\Gamma) = \sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$, οπότε $(A\Gamma)^2 = 18$.

$(B\Gamma) = \sqrt{(4+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$, οπότε $(B\Gamma)^2 = 26$.

Παρατηρούμε ότι $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$. Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία την Α.

6. Είναι

$(AB) = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = 5$.

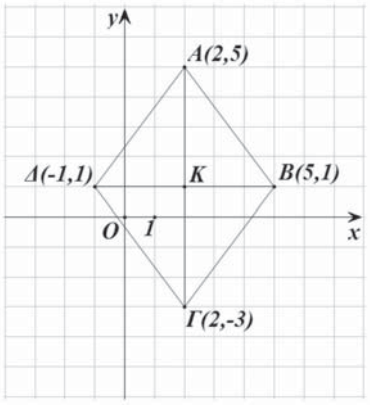
$(ΒΓ) = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2} = 5.$

$(ΓΔ) = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2} = 5.$

$(ΔΑ) = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = 5.$

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

Σχόλιο: Άμεσα προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, αφού οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.



7. Πρέπει

i) $f(2) = 6 \Leftrightarrow 2^2 + k = 6 \Leftrightarrow k = 2.$

ii) $g(-2) = 8 \Leftrightarrow k(-2)^3 = 8 \Leftrightarrow k = -1.$

iii) $h(3) = 8 \Leftrightarrow k\sqrt{4} = 8 \Leftrightarrow k = 4.$

8. i) Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$.

- Για $y = 0$ έχουμε $x = 4$, οπότε η $y = f(x)$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(4, 0)$.
- Για $x = 0$ έχουμε $y = -4$, οπότε η $y = f(x)$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0, -4)$.

Ομοίως

ii) Η g έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και τέμνει

- τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A_1(2, 0)$ και $A_2(3, 0)$ και
- τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B(0, 6)$.

iii) Η h έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και

- έχει με τον άξονα $x'x$ κοινό σημείο το $A(1, 0)$.
- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο το $B(0, 1)$.

iv) Η q έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και

- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 1)$.

v) Η φ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $[1, +\infty)$, οπότε

- έχει με τον άξονα $x'x$ ένα μόνο κοινό σημείο το $A(1, 0)$ και
- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.

vi) Η ψ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, οπότε

- έχει με τον άξονα $x'x$ δύο κοινά σημεία, τα $A_1(-2, 0)$ και $A_2(2, 0)$.
- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.

9. i) Για x = 0 έχουμε f(0) = –1. Άρα η C_f τέμνει τον y΄y στο σημείο A(0, –1).
Για y = 0 έχουμε $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή x = 1.
Άρα η C_f τέμνει τον x΄x στα σημεία $B_1(-1, 0)$ και $B_2(1, 0)$.
ii) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

10. i) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Άρα x = 5 ή x = 2.
Για x = 2, g(2) = 4 – 6 = –2.
Για x = 5, g(5) = 4.
Άρα τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα A(2, –2) και B(5, 4).
ii) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5$.

§ 6.3. Η συνάρτηση f(x) = αx + β
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Όπως είναι γνωστό, για το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας y = αx + β ισχύει: α = εφω, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η y = αx + β με τον άξονα x΄x. Επομένως, θα έχουμε
i) εφω = 1, οπότε ω = 45°.
ii) εφω = $\sqrt{3}$, οπότε ω = 60°.
iii) εφω = –1, οπότε ω = 135°.
iv) εφω = $-\sqrt{3}$, οπότε ω = 120°.

2. Αν θέσουμε $\Delta x = x_2 - x_1$ και $\Delta y = y_2 - y_1$, έχουμε:

i) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1.$

ii) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1.$

iii) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 1}{-1 - 2} = 0.$

iv) $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 3}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2.$

3. Σε όλες τις περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής y = αx + β.
i) Επειδή α = –1 και β = 2, η εξίσωση της ευθείας είναι: y = –x + 2.
ii) Επειδή α = εφ 45° = 1 και β = 1, η εξίσωση της ευθείας είναι: y = x + 1.

iii) Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη με την $y = 2x - 3$ θα έχει ίδια κλίση με αυτή, οπότε θα είναι $\alpha = 2$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $y = 2x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A(1, 1) θα ισχύει $1 = 2 \cdot 1 + \beta$ οπότε θα έχουμε $\beta = -1$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 2x - 1$.

4. Όπως είδαμε στην άσκηση 2, σε όλες τις περιπτώσεις η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης, οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$.

i) Επειδή $\alpha = 1$, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $y = x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A(1, 2) θα ισχύει $2 = 1 + \beta$ οπότε θα είναι $\beta = 1$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι $y = x + 1$.

ii) Επειδή $\alpha = -1$, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $y = -x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A(1, 2) θα ισχύει $2 = -1 + \beta$ οπότε θα είναι $\beta = 3$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -x + 3$.

iii) Επειδή $\alpha = 0$, η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A(2, 1), η ζητούμενη εξίσωση είναι $y = 1$.

iv) Επειδή $\alpha = -2$, η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = -2x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο A(1, 3) θα ισχύει $3 = -2 + \beta$ οπότε θα είναι $\beta = 5$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -2x + 5$.

5. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $C = \alpha \cdot F + \beta$ επειδή το νερό παγώνει στους 0°C ή στους 32°F, θα ισχύει $0 = \alpha \cdot 32 + \beta$. (1)
Επειδή, επιπλέον, το νερό βράζει στους 100°C ή στους 212°F, θα ισχύει $100 = \alpha \cdot 212 + \beta$. (2)
Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε $100 = \alpha \cdot 180$, οπότε $\alpha = \frac{5}{9}$ και επομένως $\beta = -\frac{5}{9} \cdot 32$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$C = \frac{5}{9}F - \frac{5}{9} \cdot 32 \Leftrightarrow C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον αριθμό T, τότε θα ισχύει

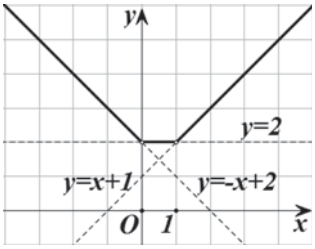
$$T = \frac{5}{9}(T - 32) \Leftrightarrow 9T = 5T - 5 \cdot 32 \Leftrightarrow 4T = -5 \cdot 32 \Leftrightarrow T = -40.$$

Άρα οι −40°F αντιστοιχούν στους −40°C.

6. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται:

✓ Από το τμήμα της ευθείας $y = -x + 2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in (-\infty, 0]$.

✓ Από το τμήμα της ευθείας $y = 2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in [0, 1]$ και

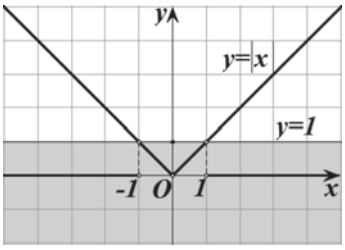


✓ Από το τμήμα της ευθείας y = x + 1 του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in [1, +\infty)$.

7. i) Οι ρίζες εξίσωσης f(x) = 1 είναι οι τετμημένες κοινών σημείων της y = f(x) και της ευθείας y = 1, δηλαδή οι αριθμοί –1 και 1.
Οι ρίζες της εξίσωση f(x) = x είναι τετμημένες των κοινών σημείων της y = f(x) και της ευθείας y = x, δηλαδή οι αριθμοί –2, 0 και 1.

ii) Οι λύσεις της ανίσωσης f(x) < 1 είναι οι τετμημένες των σημείων της y = f(x) τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία y = 1, δηλαδή οι αριθμοί $x \in (-\infty, 1) - \{-1\}$.
Οι λύσεις της ανίσωσης f(x) ≥ x είναι οι τετμημένες των σημείων της y = f(x) τα οποία βρίσκονται πάνω από την ευθεία y = x ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα σημεία $x \in [-2, 0] \cup [1, +\infty)$.

8. i) Οι γραφικές παραστάσεις των f(x) = |x| και g(x) = 1 δίνονται στο διπλανό σχήμα.



✓ Οι λύσεις της ανίσωσης $|x| \le 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της y = |x| που βρίσκονται κάτω από την ευθεία y = 1 ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα $x \in [-1, 1]$.

✓ Οι λύσεις ανίσωσης |x| > 1 είναι οι τετμημένες των σημείων της y = |x| που βρίσκονται πάνω από την ευθεία y = 1, δηλαδή τα $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

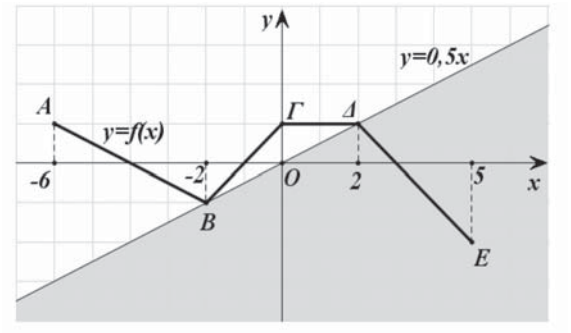
ii) Από θεωρία γνωρίζουμε ότι για ρ > 0 ισχύει
$|x| \le \rho \Leftrightarrow -\rho \le x \le \rho$.
$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$.
Επομένως
$|x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.
$|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι
$f(-6) = 1,\ f(-5) = \frac{1}{2},\ f(-4) = 0,\ f(-3) = -\frac{1}{2},\ f(-2) = -1,\ f(-1) = 0.$
$f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 0,\ f(4) = -1,\ f(5) = -2.$

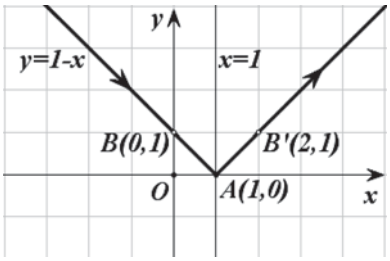
ii) Οι ρίζες της εξίσωσης f(x) = α είναι οι τετμημένες του σημείου της C_f που έχουν τεταγμένη α. Επομένως
✓ Οι ρίζες της f(x) = 0 είναι οι αριθμοί –4, –1 και 3.
✓ Οι ρίζες της f(x) = –1 είναι οι αριθμοί –2 και 4.
✓ Οι ρίζες της f(x) = 1 είναι ο αριθμός –6 και όλοι οι αριθμοί του κλειστού διαστήματος [0, 2].

iii) Η ευθεία ΒΔ είναι εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία Β(–2, –1) και Δ(2, 1) θα ισχύει $-1 = \alpha(-2) + \beta$ και $1 = \alpha \cdot 2 + \beta$.
Οπότε, με πρόσθεση των εξισώσεων αυτών κατά μέλη, βρίσκουμε ότι $\beta = 0$ και επομένως θα έχουμε $\alpha = 0{,}5$.
Άρα η εξίσωση της ευθείας ΒΔ θα είναι η $y = 0{,}5x$.



Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0{,}5x$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 0{,}5x$, ή πάνω σ' αυτή. Είναι δηλαδή όλα τα $x \in [2,5] \cup \{-2\}$.

2. Η ανάκλαση γίνεται στο σημείο Α(1, 0) και η ανακλωμένη είναι συμμετρική της ημιευθείας ΑΒ (σχ.) ως προς άξονα την ευθεία $x = 1$.
Επομένως, η ανακλώμενη θα είναι η ημιευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(1, 0) και Β΄(2, 1), όπου Α η αρχή της.

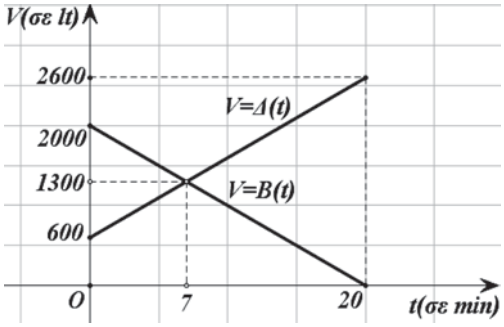


Αν $y = \alpha x + \beta$, $x \geq 1$ είναι η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας, τότε αυτή θα επαλυθεύεται από τα ζεύγη (1, 0) και (2, 1). Δηλαδή θα ισχύουν $0 = \alpha + \beta$ και $1 = 2\alpha + \beta$, από τις οποίες βρίσκουμε $\alpha = 1$ και $\beta = -1$. Επομένως η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας είναι: $y = x - 1$, $x \geq 1$.

3. i) α) Αν Β(t) είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στο βυτιοφόρο κατά τη χρονική στιγμή t, τότε θα ισχύει $B(t) = 2000 - 100t$ και επειδή πρέπει $B(t) \geq 0$ θα ισχύει $2000 - 100t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 20$.
Επομένως, θα έχουμε $B(t) = 2000 - 100t$, $0 \leq t \leq 20$.

β) Αν Δ(t) είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στη δεξαμενή κατά τη χρονική στιγμή t, τότε θα ισχύει $\Delta(t) = 600 + 100t$, $0 \leq t \leq 20$.

ii) Οι γραφικές παραστάσεις της παραπάνω συνάρτησης είναι τα ευθύγραμμα τμήματα του παρακάτω σχήματος. Η χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο ποσότητες είναι ίσες είναι η λύση της εξίσωσης B(t) = Δ(t), η οποία γράφεται 2000 – 100t = 600 + 100t ⇔ 200t = 1400 ⇔ t = 7.
Άρα η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η t = 7min.



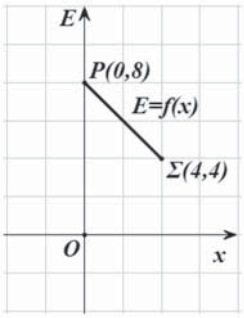
4. Για να βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΜΓΔ}}$ αφαιρούμε από το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ το άθροισμα των εμβαδών των ορθογώνιων τριγώνων $\overset{\triangle}{\text{ΑΜΔ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΒΜΓ}}$. Έτσι έχουμε

$$E_{\text{ΜΓΔ}} = E_{\text{ΑΒΓΔ}} - E_{\text{ΑΜΔ}} - E_{\text{ΒΜΓ}}$$
$$= \frac{4+2}{2}\cdot 4 - \frac{x\cdot 4}{2} - \frac{(4-x)\cdot 2}{2}$$
$$= 12 - 2x - (4 - x) = -x + 8.$$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = -x + 8, \text{ με } 0 \le x \le 4.$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία Ρ(0, 8) και Σ(4, 4).



5. i) Το ευθ. τμήμα k_1 έχει εξίσωση της μορφής h = αt + β και επειδή διέρχεται από τα σημεία Α(3, 0) και Γ(0, 20) θα ισχύει 0 = 3α + β και 20 = β, οπότε θα είναι $\alpha = -\frac{20}{3}$ και β = 20. Επομένως, το ευθ. τμήμα k_1 έχει εξίσωση

$$h = -\frac{20}{3}t + 20\ ,\ 0 \le t \le 3.$$

Άρα η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού K_1 είναι η

$$h_1(t) = -\frac{20}{3}t + 20,\ 0 \le t \le 3. \qquad (1)$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού K_2 είναι η

$$h_2(t) = -5t + 20,\ 0 \le t \le 4. \qquad (2)$$

ii) Το κερί k_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί k_1 τη χρονική στιγμή κατά την οποία ισχύει $h_2(t) = 2h_1(t)$. Έχουμε λοιπόν:

$$h_2(t) = 2h_1(t) \Leftrightarrow -\frac{\cancel{20}}{4}t + \cancel{20} = 2\left(-\frac{\cancel{20}}{3}t + \cancel{20}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = 2\left(-\frac{1}{3}t + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = -\frac{2}{3}t + 2 \Leftrightarrow -3t + 12 = -8t + 24$$

$$\Leftrightarrow 5t = 12 \Leftrightarrow t = 2{,}4.$$

Άρα, το k_2 είχε το διπλάσιο ύψος από το k_1 τη χρονική στιγμή $t = 2{,}4h$.

iii) Αν εργαστούμε όπως στο ερώτημα i) θα βρούμε ότι

$$h_1(t) = -\frac{\upsilon}{3}t + \upsilon\ ,\ 0 \le t \le 3.$$

$$h_2(t) = -\frac{\upsilon}{4}t + \upsilon\ ,\ 0 \le t \le 4.$$

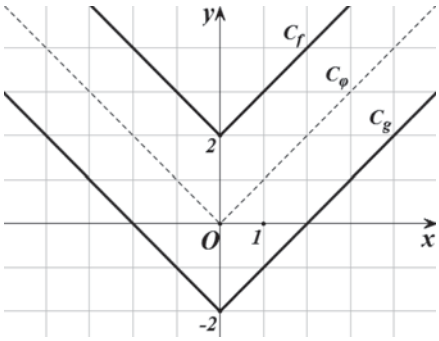
οπότε, $h_2(t) = 2h_1(t) \Leftrightarrow -\frac{\upsilon}{4}t + \upsilon = 2\left(-\frac{\upsilon}{3}t + \upsilon\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = 2\left(-\frac{1}{3}t + 1\right) \Leftrightarrow t = 2{,}4.$$

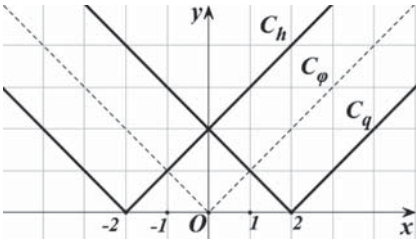
Παρατηρούμε δηλαδή ότι το k_2 θα έχει διπλάσιο ύψος από το k_1 τη χρονική στιγμή $t = 2{,}4h$, ανεξάρτητα του αρχικού ύψους υ των κεριών k_1 και k_2.

§ 6.4. Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

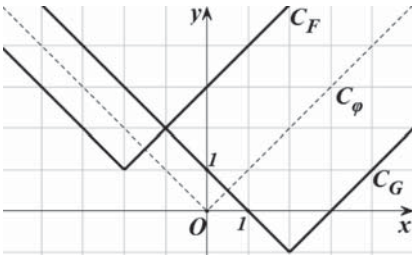
1. Όπως είδαμε στην §4.3, η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$, αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω (σχήμα).



2. Η γραφική παράσταση της h(x) = |x + 2| προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της y = |x|, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά, ενώ η γραφική παράσταση της q(x) = |x – 2| προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της y = |x|, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (σχήμα).

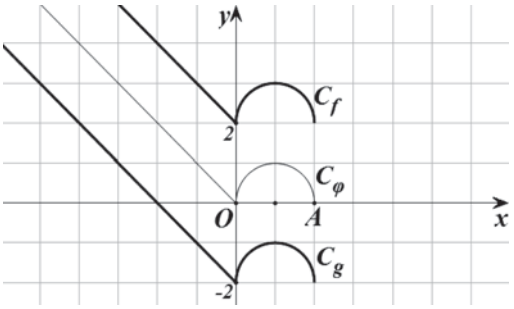


3. Αρχικά χαράσσουμε την y = |x + 2|, που, όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της y = |x| κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την y = |x + 2| + 1, που, όπως γνωρίζουμε, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της y = |x + 2| κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Επομένως, η γραφική παράσταση της F(x) = |x + 2| + 1. προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της y = |x|, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδας προς τα πάνω (σχήμα).

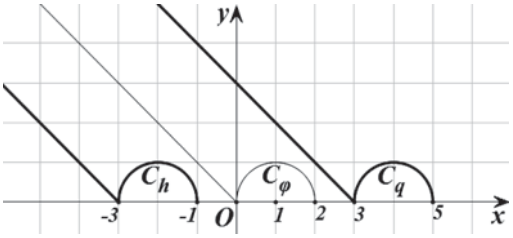


Ομοίως, η γραφική παράσταση της G(x) = |x – 2| – 1, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της y = |x|, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω (σχήμα).

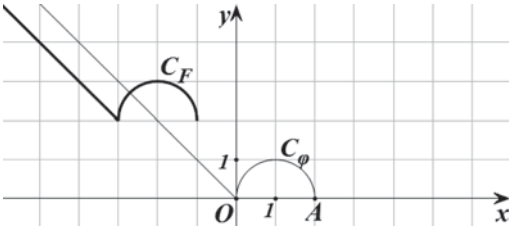
4. i)

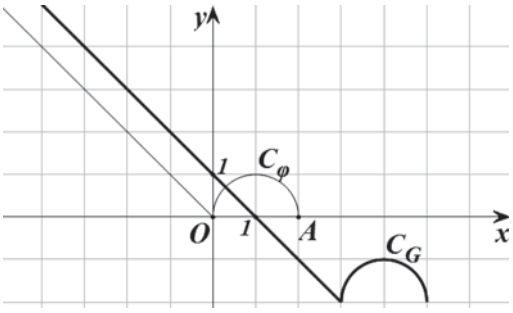


ii)



iii)





5. i) $f(x) = 2(x-2)^2 - 1 + 1 = 2(x-2)^2$.
ii) $f(x) = 2(x-3)^2 - 1 - 2 = 2(x-3)^2 - 3$.
iii) $f(x) = 2(x+2)^2 - 1 + 1 = 2(x+2)^2$.
iv) $f(x) = 2(x+3)^2 - 1 - 2 = 2(x+3)^2 - 3$.

§ 6.5. Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες συνάρτησης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. • Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
• Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
• Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

2. • Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -1$ και δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
• Η g δεν παρουσιάζει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.
• Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ και για $x = 1$ το $h(-1) = h(1) = -2$, ενώ δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

3. i) Αρκεί να δείξουμε τα $f(x) \geq f(3)$. Έχουμε
$f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$, που ισχύει.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \leq g(1)$. Έχουμε
$$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2+1} \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2,$$ που ισχύει.

4. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4$, άρα η f_1 είναι άρτια.

ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1$, άρα η f_2 είναι άρτια.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_3(-x) = |-x + 1|$, οπότε δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, αφού
$f_3(-1) \neq \pm f_3(1)$.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(-x)$, άρα η f_4 περιττή.

v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0. Άρα, η f_5 δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.
$$f_5(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x},$$ άρα ούτε άρτια, ούτε περιττή.

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$f_6(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f_6(x),$$ άρα f_6 είναι περιττή.

5. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει
$$f_1(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f_1(x).$$
Άρα η f_1 είναι άρτια.

ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $[2, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το Ο. Άρα δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f_3(-x) = |-x-1| - |-x+1| = |x+1| - |x-1| = -f_3(x).$$

Άρα η f_3 είναι περιττή.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι περιττή, διότι ισχύει

$$f_4(x) = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x^2+1} = \frac{1}{x}$$

Τέλος, αν εργαστούμε όπως στην i), θα αποδείξουμε ότι:

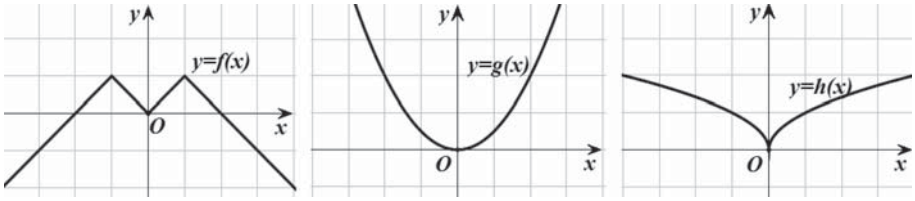
v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι $f_5(-x) = f_5(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και είναι άρτια, διότι $f_6(-x) = f_6(x)$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

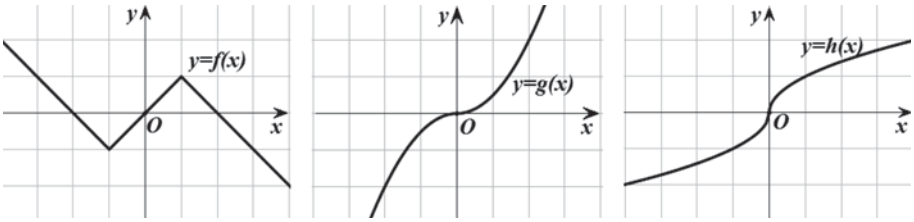
6. i) Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$. Άρα η f είναι περιττή.
ii) Η C_g έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Άρα η g είναι άρτια.
iii) Η C_h δεν έχει ούτε άξονα συμμετρίας τον y΄y, ούτε κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$. Άρα η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

7. Ομοίως
i) Η f είναι άρτια.
ii) Η g είναι περιττή.
iii) Η h δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

8. α) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς τον άξονα y΄y.



β) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς την αρχή των αξόνων.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 7.1. Μελέτης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

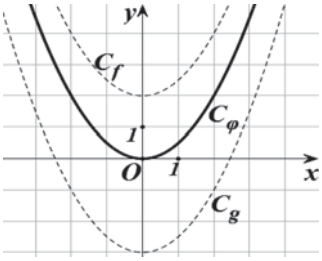
1. Η καμπύλη είναι μια παραβολή με κορυφή το Ο(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y. Επομένως, θα έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x^2$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(1, 2), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Άρα θα ισχύει $2 = \alpha \cdot 1^2 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Οπότε, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = 2x^2$.

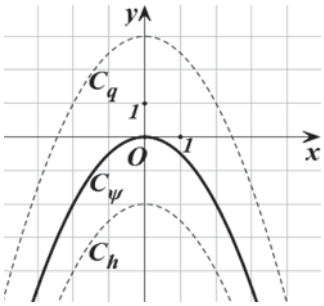
2. i) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0{,}5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα πάνω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y (σχ.).

Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$ και $g(x) = 0{,}5x^2 - 3$ προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = 0{,}5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.



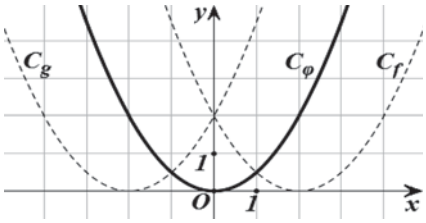
ii) Η γραφική παράσταση της $\psi(x) = -0{,}5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα κάτω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y (σχ.).

Οι γραφικές παράστασεις των συναρτήσεων $h(x) = -0{,}5x^2 - 2$ και $q(x) = -0{,}5x^2 + 3$ προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0{,}5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

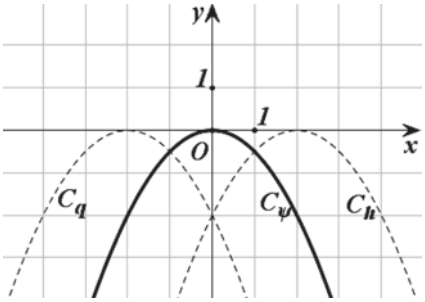


Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να παίρναμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.

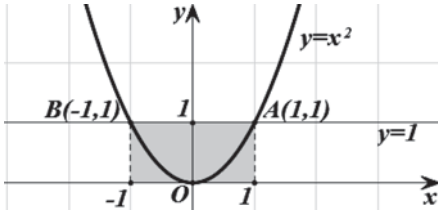
3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0{,}5x^2$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παράστασεις των συναρτήσεων $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2$ και $g(x) = 0{,}5(x + 2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = 0{,}5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.



ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -0{,}5x^2$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -0{,}5(x - 2)^2$ και $q(x) = -0{,}5(x + 2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0{,}5x^2$, της πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά.



4. i) Η γραφική παράσταση των $f(x) = x^2$ είναι η παραβολή $y = x^2$ του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 1$ είναι η ευθεία $y = 1$ του ίδιου σχήματος.



Οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία A(1, 1) και B(–1, 1) που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

Επειδή

$$x^2 \le 1 \Leftrightarrow f(x) \le g(x) \quad \text{και} \quad x^2 > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

η ανίσωση $x^2 \le 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $x^2 > 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g. Επομένως, θα έχουμε

$$x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1 \quad \text{και} \quad x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1.$$

ii) Έχουμε

$x^2 \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

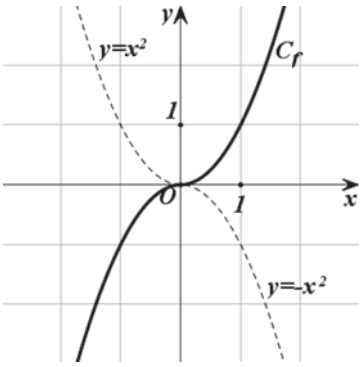
$x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

διότι το τριώνυμο $x^2 - 1$ έχει ρίζες τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι

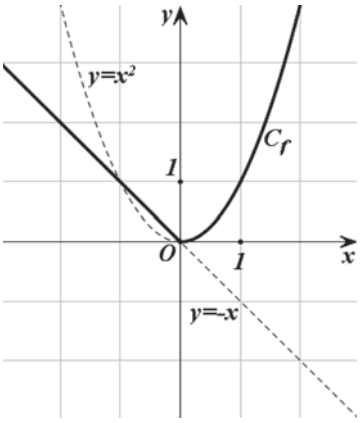
$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$



Επομένως, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $y = -x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y = x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.

2. Η γραφική παράστασης της

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$



αποτελείται από το τμήμα της ευθείας $y = -x$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y = x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.

Από τη γραφική παράσταση της f προσκύπτει ότι

- ✓ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- ✓ Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$.

3. i) Από το σχήμα αυτό προκύπτει ότι

α) Στο διάστημα (0, 1) από όλες τις γραφικές παραστάσεις χαμηλότερα βρίσκεται η $y = x^3$, έπειτα η $y = x^2$, έπειτα η $y = x$ και τέλος η $y = \sqrt{x}$. Επομένως, αν $x \in (0, 1)$ τότε $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

β) Στο διάστημα $(1, +\infty)$ συμβαίνει το αντίθετο. Επομένως αν $x \in (1, +\infty)$, τότε $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

ii) • Έστω $0 < x < 1$. Τότε

- ✓ $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^2(x - 1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.
- ✓ $x^2 < x \Leftrightarrow x(x - 1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.
- ✓ $x < \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 < x$, που ισχύει από πριν.

Άρα $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

- Έστω $x > 1$. Αν εργαστούμε αναλόγως, βρίσκουμε ότι $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

4. Αν $x > 0$ είναι η τετμημένη του σημείου Α, τότε η τεταγμένη του θα είναι η $y = x^2$. Άρα το Α θα έχει συντεταγμένες (x, x^2), οπότε το σημείο Β, που είναι συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα y΄y, θα έχει συντεταγμένες $(-x, x^2)$. Επομένως, θα έχουμε
$(AB) = 2x$ και $(OA) = (OB) = \sqrt{x^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2 + x^4}$.

Επομένως, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ισόπλευρο, αν και μόνο αν

$$(OA) = (AB) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + x^4} \Leftrightarrow (2x)^2 = x^2 + x^4$$
$$\Leftrightarrow x^4 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3,$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}\text{, διότι } x > 0.$$

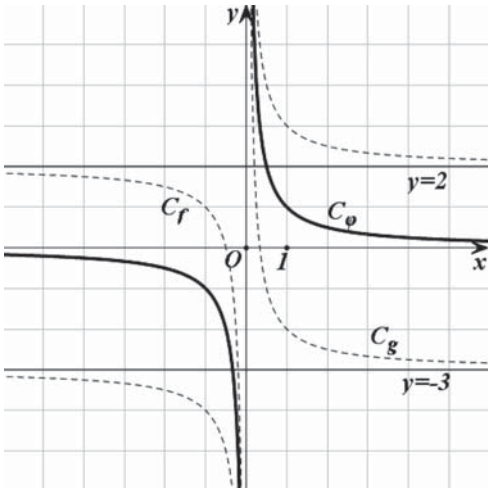
§ 7.2. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{x}$
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(2, 1), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Επομένως θα ισχύει $1 = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 2$.

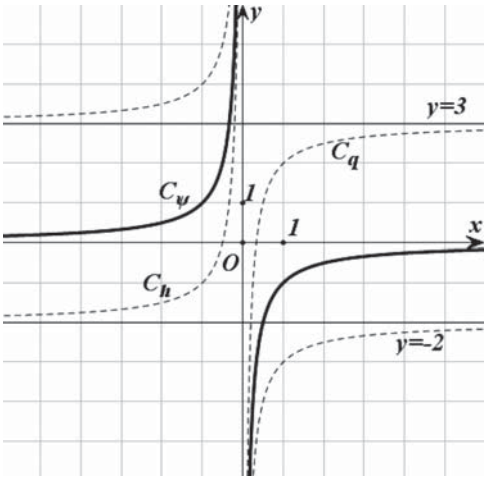
Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = \frac{2}{x}$.

2. i) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή με κλάδους στο 1° και 3° τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x} - 3$ προκύπτουν από κατακόρυφη μετα-



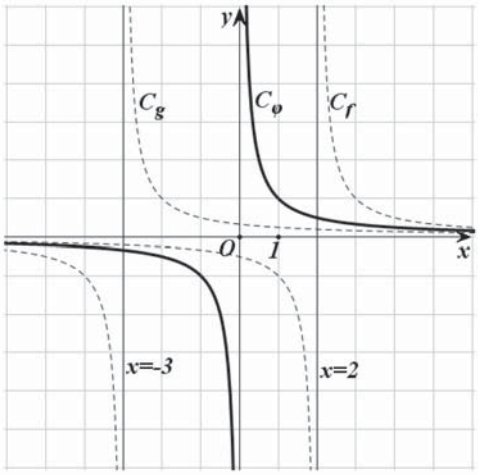
τόπιση της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$ της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

ii) Η γραφική παράσταση της $\psi(x) = -\frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή με κλάδους στο 2° και 4° τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).
Η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -\frac{1}{x} - 2$ και $q(x) = -\frac{1}{x} + 3$ προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της υπερβολής $y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



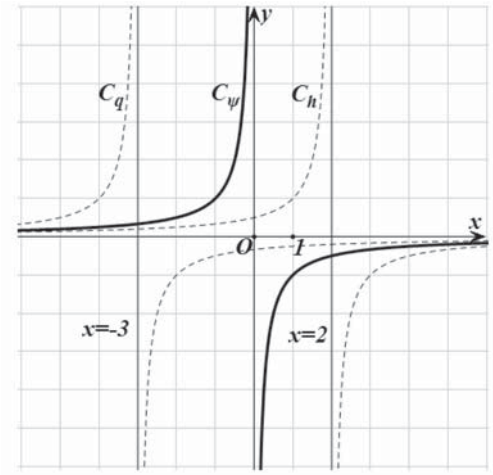
Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να πάρουμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.

3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{x+3}$, προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής



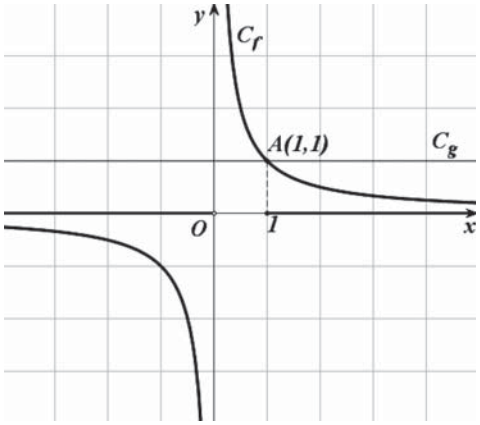
$y = \frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -\frac{1}{x}$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -\frac{1}{x-2}$ και $q(x) = -\frac{1}{x+3}$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής



$y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

4. i) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 1$ είναι η ευθεία C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g τέμνονται στο σημείο A(1, 1). Επομένως:



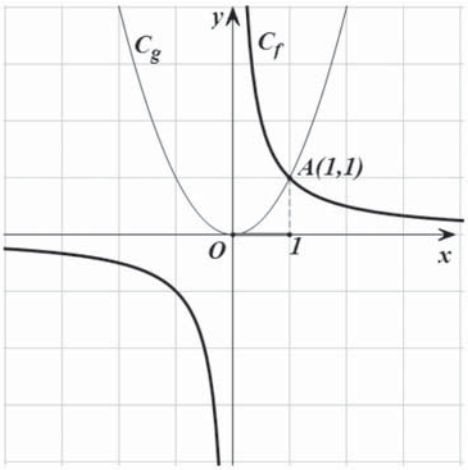
- $\frac{1}{x} \le 1 \Leftrightarrow f(x) \le g(x) \Leftrightarrow x < 0$ ή $x \ge 1$
- $\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0 < x < 1$

ii) Έχουμε

$$\frac{1}{x} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x) \le 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \ge 1.$$

$$\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

5. i) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ είναι η παραβολή C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το A(1, 1). Επειδή



$\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$ και

$\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

η ανίσωση $\frac{1}{x} \le x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $\frac{1}{x} > x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.
Επομένως, θα έχουμε

- $\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x \ge 1$.
- $\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

ii) Έχουμε

- $\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x^2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^3}{x} \le 0$

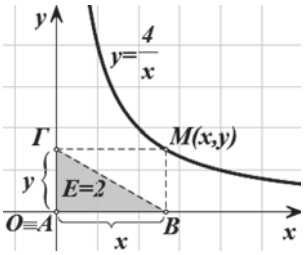
$$\Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow x(x^3-1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \ge 1.$$

Επομένως

• $\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

6. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε ΑΒ = ΟΑ = x > 0 και ΑΓ = ΟΓ = y > 0. Τότε το εμβαδό Ε του τριγώνου είναι $E = \frac{xy}{2}$, οπότε έχουμε

$$\frac{xy}{2} = 2 \Leftrightarrow xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}, \quad (1).$$



Η γραφική παράσταση της (1) είναι υπερβολή με εξίσωση $y = \frac{4}{x}$ και φαίνεται στο σχήμα.

§ 7.3. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έχουμε

$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x^2 - 2 \cdot x + 1^2) - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 3.$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii) Έχουμε

$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 9 = -2(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 9 = -2(x - 2)^2 - 1.$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = -2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

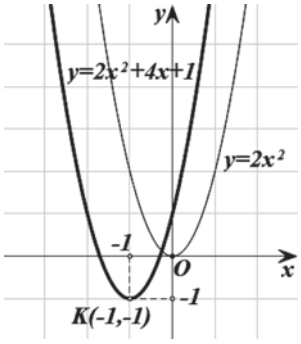
2. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ είναι $\alpha = 2 > 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει ελάχιστο για

$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, το $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{3}{2}$.

β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -3x^2 - 5x + 2$ είναι $\alpha = -3 < 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-5}{6}, \text{ το } g\left(\frac{-5}{6}\right) = -3\left(\frac{-5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{-5}{6}\right) + 2 = \frac{49}{12}.$$

3. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ είναι $\alpha = 2 > 0$, οπότε αυτή



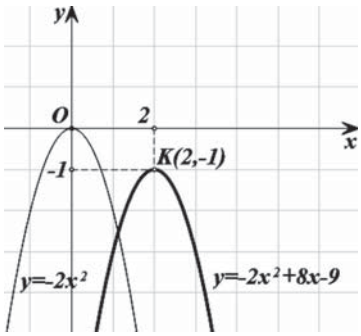
- ✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για

  $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -1$, το $f(-1) = -1$.
- ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$. Ακόμη η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή και
- ✓ έχει κορυφή το σημείο $K(-1, -1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$,
- ✓ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία

  $A\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ και $B\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

  οι τετμημένες των οποίων, είναι οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 + 4x + 1$, ενώ τον άξονα y΄y στο σημείο $\Gamma(0, 1)$.

β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$ είναι $\alpha = -2 < 0$, οπότε αυτή



- ✓ Παρουσιάζει μέγιστο για

  $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = 2$, το $g(2) = -1$
- ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Ακόμη η γραφική της παράσταση είναι παραβολή και
- ✓ έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$,
- ✓ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0, -9)$ ενώ, δεν τέμνει τον άξονα x΄x, γιατί το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.

4. Γνωρίζουμε ότι

i) Όταν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι ανοιχτή προς τα πάνω, ενώ όταν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω. Επομένως, θετικό α έχουν τα τριώνυμα f_1, f_3 και f_6, ενώ αρνητικό α έχουν τα τριώνυμα f_2, f_4, f_5 και f_7.

ii) Το γ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με τον άξονα y΄y. Επομένως, θετικό γ έχουν τα τριώνυμα f_1 και f_5, αρνητικό γ έχουν τα τριώνυμα f_2, f_3, f_6 και f_7, ενώ γ ίσον με μηδέν έχει το f_4.

iii) Η τεταγμένη της κορυφής Κ της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δίνεται από τον τύπο $x_K = \frac{-\beta}{2\alpha}$, οπότε ισχύει $\beta = -2\alpha \cdot x_K$. Επομένως

✓ για την f_2 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,
✓ για την f_3 που έχει $\alpha > 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta < 0$,
✓ για την f_4 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,
✓ για την f_5 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,
✓ για την f_6 που έχει $\alpha > 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $\beta > 0$, και
✓ για την f_7 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $\beta < 0$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+	–	+	–	–	+	–
β	0	+	–	+	+	+	–
γ	+	–	–	0	+	–	–
Δ	–	0	+	+	+	+	–

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παραβολή εφάπτεται του x΄x μόνο αν είναι $\Delta = 0$.
Δηλαδή $(k + 1)^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 - 4k = 0$
$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$

ii) Η παραβολή έχει τον y΄y άξονα συμμετρίας μόνο αν η κορυφή της βρίσκεται στον άξονα y΄y, δηλαδή αν και μονο αν $\frac{-\beta}{2\alpha} = 0$. Επομένως πρέπει

$$-\frac{(k+1)}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

iii) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο

$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ δηλαδή το σημείο $K\left(-\frac{k+1}{2}, f\left(-\frac{k+1}{2}\right)\right)$.

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει $f\left(-\frac{k+1}{2}\right) = -4$, που διαδοχικά γράφεται

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - (k+1)\left(\frac{k+1}{2}\right) + k = -4 \Leftrightarrow (k+1)^2 - 2(k+1)^2 + 4k = -16$$
$$\Leftrightarrow -(k+1)^2 + 4k + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow -k^2 - 2k - 1 + 4k + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow -k^2 + 2k - 1 + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 15 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $k_1 = -3$ και $k_2 = 5$.
• Για $k = -3$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = 1$, ενώ
• Για $k = 5$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = -3$.

2. i) Επειδή η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω, θα είναι $\alpha < 0$.

ii) Επειδή η παραβολή τέμνει τον άξονα των x στα σημεία A(1, 0) και B(5, 0), το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες τις $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 5$.
Άρα είναι $\Delta > 0$.

iii) Επειδή $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ και $\beta = 6$, θα έχουμε $1 + 5 = \frac{-6}{\alpha}$, οπότε θα είναι $\alpha = -1$.

Τέλος, επειδή $\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$, θα έχουμε $1 \cdot 5 = \frac{\gamma}{-1}$, οπότε θα είναι $\gamma = -5$.

Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Αλλιώς. Επειδή το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 5$, θα είναι της μορφής $\rho(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) = \alpha(x - 1)(x - 5) = \alpha x^2 - 6\alpha x + 5\alpha$.
Επομένως θα είναι $\beta = -6\alpha$ και επειδή $\beta = 6$, θα έχουμε $\alpha = -1$.
Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

3. i) Η περίμετρος L του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $L = 2(x + y)$ και επειδή δίνεται ότι $L = 20$, θα ισχύει $2(x + y) = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$.
Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι ίσο με

$$E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x.$$

Άρα $f(x) = -x^2 + 10x$, $0 < x < 10$.

ii) Το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το τριώνυμο f(x). Αυτό συμβαίνει όταν $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-10}{-2} = 5$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο, αφού για $x = 5$ είναι και $y = 5$. Η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με

$$f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25.$$

4. Αν θέσουμε (ΑΜ) = x, τότε θα είναι (ΜΒ) = 6 – x (σχήμα). Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΜ παίρνουμε.

$$\upsilon_1^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}, \text{ οπότε } \upsilon_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

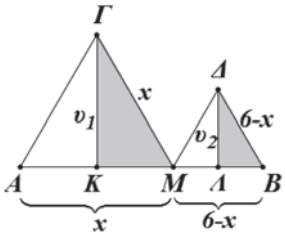
Ομοίως από το τρίγωνο ΛΔΒ παίρνουμε $\upsilon_2 = \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}$.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι τότε

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}(AM)(K\Gamma) + \frac{1}{2}(MB)(\Lambda\Delta)$$

$$= \frac{1}{2}x\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(6-x)\frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(6-x)^2$$



Άρα $E = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 6x + 18)$, με $0 \le x \le 6$. (1)

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν Ε είναι ελάχιστο για την τιμή του x, για την οποία η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 18$ παρουσιάζει ελάχιστο. Επειδή $\alpha = 1 > 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{6}{2} = 3.$$

Επομένως το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

5. Από το σχήμα βλέπουμε ότι για τις διαστάσεις x και y ισχύει

$$2x + 2x + 3y = 240 \Leftrightarrow 4x + 3y = 240 \Leftrightarrow y = \frac{240 - 4x}{3}. \quad (1)$$

Το εμβαδόν των δύο χώρων είναι

$$E = 2xy = 2x\left(\frac{240 - 4x}{3}\right) = -\frac{8}{3}x^2 + 160x. \quad (2)$$

Για τη συνάρτηση $E(x) = -\frac{8}{3}x^2 + 160x$ είναι $\alpha = -\frac{8}{3} < 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-160}{\frac{-16}{3}} = 30$.

Τότε από την (1) παίρνουμε $y = \frac{240 - 4 \cdot 30}{3} = 40$.

Άρα, οι διαστάσεις που δίνουν το μέγιστο εμβαδόν είναι x = 30m και y = 40m.