

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \frac{2^3}{31} \cdot \left(2^3 + 2^0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad \text{και} \quad B = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) : \left(\frac{8}{3^4} - \frac{2}{9^2} \right) + \frac{3}{2^4}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 11\alpha\beta\gamma \quad \text{και} \quad \alpha\beta\gamma \neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma = \frac{8-\alpha}{2\alpha} + \frac{12-\beta}{3\beta} + \frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$A = \frac{2^3}{31} \cdot \left(2^3 + 2^0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{31} \cdot \left(8 + 1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{31} \cdot \left(9 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{31} \cdot 9 = \frac{72}{31},$$

$$B = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) : \left(\frac{8}{3^4} - \frac{2}{9^2} \right) + \frac{3}{2^4} = \left(\frac{3}{12} - \frac{1}{12} \right) : \left(\frac{8}{81} - \frac{2}{81} \right) + \frac{3}{16} = \frac{1}{6} \cdot \frac{81}{6} + \frac{3}{16} = \frac{9}{4} + \frac{3}{16} = \frac{39}{16}.$$

Επειδή είναι $A - B = \frac{72}{31} - \frac{39}{16} = \frac{72 \cdot 16 - 39 \cdot 31}{31 \cdot 16} = \frac{1152 - 1209}{496} < 0$, έπεται ότι $A < B$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{8-\alpha}{2\alpha} + \frac{12-\beta}{3\beta} + \frac{16-\gamma}{4\gamma} = \frac{8}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2\alpha} + \frac{12}{3\beta} - \frac{\beta}{3\beta} + \frac{16}{4\gamma} - \frac{\gamma}{4\gamma} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Από την υπόθεση $6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 11\alpha\beta\gamma$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$ με διαίρεση και των δύο μελών της ισότητας με $6\alpha\beta\gamma \neq 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{6(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{6\alpha\beta\gamma} = \frac{11\alpha\beta\gamma}{6\alpha\beta\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{11}{6},$$

οπότε η παράσταση Γ έχει τιμή

$$\Gamma = 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{13}{12} = 4 \cdot \frac{11}{6} - \frac{13}{12} = \frac{44}{6} - \frac{13}{12} = \frac{75}{12} = \frac{25}{4}.$$

Πρόβλημα 2

Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.

Λύση.

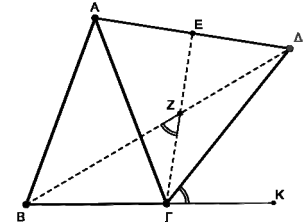
Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι x , τότε, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 24 \cdot 500 &= x + \frac{10x}{100} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 12000 = x + \frac{x}{10} \Leftrightarrow 5x + 120000 = 10x + x \\ \Leftrightarrow 6x &= 120000 \Leftrightarrow x = \frac{120000}{6} = 20000. \end{aligned}$$

Άρα η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι $x = 20000$ ευρώ και ο πελάτης θα πληρώσει συνολικά $x + \frac{10x}{100} = \frac{11x}{10} = \frac{11 \cdot 20000}{10} = 22000$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

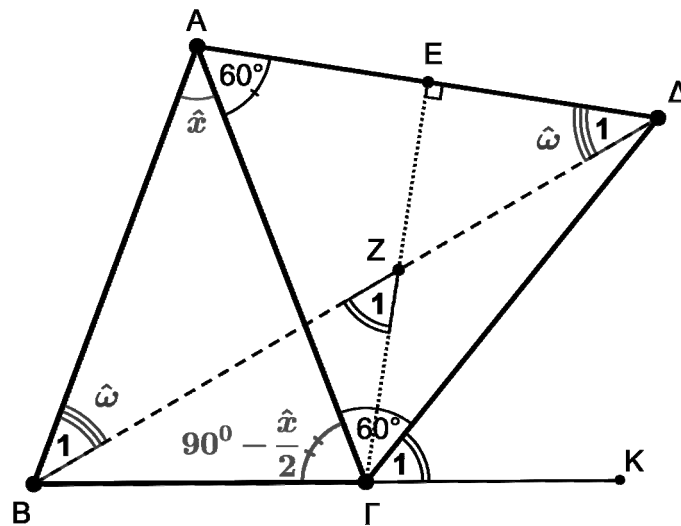
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$), το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο και E είναι το μέσο του $A\Delta$. Αν το K βρίσκεται στη προέκταση της $B\Gamma$ και οι $B\Delta, \Gamma E$ τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$ και $\hat{K}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$, είναι ίσες.



Λύση

Έστω $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{x}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{\hat{x}}{2}. \tag{1}$$



Σχήμα 1

Από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, έχουμε: $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 60^\circ$. Οι γωνίες τώρα $\hat{\Gamma}$, $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}_1$ είναι διαδοχικές με την πρώτη και την τελευταία πλευρά τους αντικείμενες ημιευθείες, έχουμε ότι $\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 60^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{x}}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 30^\circ + \frac{\hat{x}}{2}. \quad (2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$, θέτουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$ και παίρνουμε:

$$2\hat{\omega} + \hat{x} + 60^\circ = 180 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^\circ - \frac{\hat{x}}{2}. \quad (3)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο τέλος $E\Delta Z$, έχουμε:

$$\hat{Z}_1 = E\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = 30^\circ + \frac{\hat{x}}{2}. \quad (4)$$

Πρόβλημα 4

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο A που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο A όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο A .

Λύση

Το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$ έχει 2012 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής 5κ , όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \leq 5\kappa \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \kappa \leq \frac{2012}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \kappa \leq 402\frac{2}{5} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, \dots, 402\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο A είναι 402.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής 8κ , όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \leq 8\kappa \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \kappa \leq \frac{2012}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \kappa \leq 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, \dots, 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι 251.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 5 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $E\text{ΚΠ}\{5, 8\} = 40$ που ανήκουν στο σύνολο A .

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$1 \leq 40\kappa \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{40} \leq \kappa \leq \frac{2012}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{40} \leq \kappa \leq 50\frac{12}{40} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, \dots, 50\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 5 και 8 μέσα στο σύνολο A είναι 50.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο A συνολικά $402 + 251 - 50 = 603$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $2012 - 603 = 1409$ στοιχεία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237 \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{4\beta^2} \right)^3 + \frac{9\alpha - 20\beta^2}{\beta^2},$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \beta = 2^{-3}$.

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y} = \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η

παράσταση $K = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $K \leq 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

(α) Για $\alpha = \beta = 2^{-3}$ λαμβάνουμε $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{2^{-3}}{(2^{-3})^2} = \frac{2^{-3}}{2^{-6}} = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$.

Η παράσταση A γράφεται:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237 \right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} \right)^3 + 9 \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} - 20 = (8 + 237) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 8 \right)^3 + 9 \cdot 8 - 20 \\ &= 245 \cdot 2^3 + 72 - 20 = 245 \cdot 8 + 52 = 2012. \end{aligned}$$

(β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $x = \alpha y$, οπότε η παράσταση γράφεται

$$K = \frac{2\alpha y y}{\alpha^2 y^2 + y^2} = \frac{2\alpha y^2}{(\alpha^2 + 1)y^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1},$$

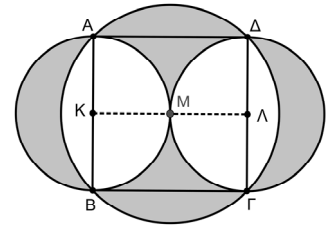
δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x, y και εξαρτάται μόνο από το λόγο α . Επιπλέον, ισχύει

$$K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο είναι αληθές. Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι 1 και λαμβάνεται όταν $\alpha - 1 = 0$, δηλαδή όταν $\alpha = 1$.

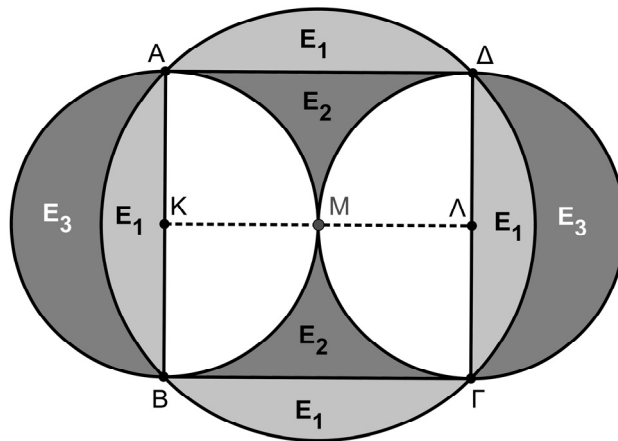
Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $K\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ . Να υπολογιστεί συναρτήσει του R , το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Λύση

Επειδή είναι $AK = \Delta\Lambda$ και $AK \parallel \Delta\Lambda$, ως κάθετες στη διάκεντρο $K\Lambda$, το τετράπλευρο $AK\Lambda\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε θα είναι $A\Delta = K\Lambda = 2R$. Ομοίως προκύπτει ότι και το τετράπλευρο $KB\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο και ότι $B\Gamma = K\Lambda = 2R$. Επομένως, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά $2R$ και εμβαδό $(AB\Gamma\Delta) = 4R^2$.



Σχήμα 2

Το τρίγωνο AKM είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $KA = KM = R$. Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε: $MA = MB = M\Gamma = M\Delta = R\sqrt{2}$, δηλαδή ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $R\sqrt{2}$ και κατά συνέπεια το εμβαδό του θα είναι: $E = \pi(R\sqrt{2})^2 = 2\pi R^2$.

Τα εμβαδά των δύο μικτόγραμμων χωρίων $MA\Delta$ και $MB\Gamma$ είναι ίσα μεταξύ τους και το άθροισμά τους προκύπτει, αν από το εμβαδό του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό των δύο μικρών ημικυκλίων (δηλαδή το εμβαδό του μικρού κύκλου).

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$2E_2 = (AB\Gamma\Delta) - \pi R^2 \Leftrightarrow 2E_2 = 4R^2 - \pi R^2 \Leftrightarrow E_2 = \left(\frac{4 - \pi}{2}\right)R^2.$$

Για τα εμβαδά των χωρίων E_3 έχουμε: $E_3 = \frac{\pi R^2}{2} - E_1$.

Άρα το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$2E_1 + 2E_2 + 2E_3 = 2E_1 + (4 - \pi)R^2 + \pi R^2 - 2E_1 = 4R^2.$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό ενός από τα τέσσερα ίσα κυκλικά τμήματα του μεγάλου κύκλου είναι:

$$E_1 = \frac{E - (AB\Gamma\Delta)}{4} = \frac{2\pi R^2 - 4R^2}{4} = \frac{(\pi - 2)R^2}{2}.$$

Ο υπολογισμός όμως δεν είναι απαραίτητος γιατί απλοποιείται με τις πράξεις.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο A που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράψουμε από το σύνολο A όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3

και στη συνέχεια διαγράφουμε όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο A.

Λύση

Το σύνολο $A = \{101, 102, 103, \dots, 2012\}$ έχει $2012 - 100 = 1912$ στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής $3k$, όπου k ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \leq 3k \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{3} \leq k \leq \frac{2012}{3} \Leftrightarrow 33\frac{2}{3} \leq k \leq 670\frac{2}{3} \Leftrightarrow k \in \{34, 35, \dots, 670\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο A είναι $670 - 33 = 637$.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι της μορφής $8k$, όπου k ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \leq 8k \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{8} \leq k \leq \frac{2012}{8} \Leftrightarrow 12\frac{5}{8} \leq k \leq 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow k \in \{13, 14, \dots, 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο A είναι $251 - 12 = 239$.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 3 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ $\{3, 8\} = 24$ που ανήκουν στο σύνολο A.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$101 \leq 24k \leq 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{24} \leq k \leq \frac{2012}{24} \Leftrightarrow 4\frac{5}{24} \leq k \leq 83\frac{20}{24} \Leftrightarrow k \in \{5, 6, \dots, 83\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 3 και 8 μέσα στο σύνολο A είναι $83 - 4 = 79$.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο A συνολικά $637 + 239 - 79 = 797$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $1912 - 797 = 1115$ στοιχεία.

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

$$\text{Έχουμε } P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^4 - 5x^2 + 4 \text{ και}$$

$$Q(x) = (\alpha x^2 + \beta x)(\gamma x^2 + \delta) + 4 = \alpha\gamma x^4 + \beta\gamma x^3 + \alpha\delta x^2 + \beta\delta x + 4.$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν, και μόνον αν, ισχύουν

$$\alpha\gamma = 1, \beta\gamma = 0, \alpha\delta = -5, \beta\delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \{\beta = 0 \text{ ή } \gamma = 0\}, \{\beta = 0 \text{ ή } \delta = 0\}, \alpha\gamma = 1, \alpha\delta = -5.$$

Οι τιμές $\gamma = 0$ και $\delta = 0$ αποκλείονται γιατί δεν επαληθεύουν τις δύο τελευταίες εξισώσεις, οπότε λαμβάνουμε $\beta = 0, \gamma = \frac{1}{\alpha}, \delta = -\frac{5}{\alpha}, \alpha \neq 0$. Από την εξίσωση $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, με αντικατάσταση των τιμών των β, γ και δ προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{5}{\alpha} = -3 \Leftrightarrow \alpha - \frac{4}{\alpha} = -3 \Leftrightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 + 3\alpha - 3 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha + 1) + 3(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 4) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \text{ ή } \alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -4$$

Επομένως οι τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = -5 \text{ ή } \alpha = -4, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{4}, \delta = \frac{5}{4}.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{|x|-1}{3} \leq \frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2} + \frac{x(x+1)}{4} > \frac{(x+2)^2}{4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{x^2}{4} + \frac{|x|-1}{3} \leq \frac{|x|+x^2}{4} \Leftrightarrow 3x^2 + 4(|x|-1) \leq 3|x| + 3x^2 \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4.$$

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x(x+1)}{4} > \frac{(x+2)^2}{4} \Leftrightarrow 2x+2+x(x+1) > (x+2)^2 \Leftrightarrow -x > 2 \Leftrightarrow x < -2.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα $[-4, -2) = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x < -2\}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{[(1+ax)^2 - (a+x)^2]}{1-a^2} = \frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a, b με $ab(a-b)(1-a^2) \neq 0$.

Λύση

Για να ορίζονται οι δεδομένες παραστάσεις πρέπει να ισχύουν:

$$1-x^2 \neq 0, 1-a^2 \neq 0 \text{ (υπόθεση)} \quad \text{και} \quad a \neq b \text{ (υπόθεση)} \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

Για $x \neq \pm 1$, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} \cdot \frac{(1+a^2x^2 - a^2 - x^2)}{(1-a^2)} &= \frac{ab}{(a-b)^2} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \cdot \frac{(1-a^2)(1-x^2)}{(1-a^2)} = \frac{ab}{(a-b)^2} \\ \Leftrightarrow x(1+x) &= \frac{ab}{(a-b)^2} \Leftrightarrow (a-b)^2 x^2 + (a-b)^2 x - ab = 0 \end{aligned}$$

Επειδή είναι $a \neq b$ η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (a-b)^4 + 4ab(a-b)^2 = (a-b)^2 [(a-b)^2 + 4ab] = (a-b)^2 (a+b)^2 = (a^2 - b^2)^2 > 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x_1 = \frac{-(a-b)^2 + (a^2 - b^2)}{2(a-b)^2} = \frac{2ab - 2b^2}{2(a-b)^2} = \frac{2b(a-b)}{2(a-b)^2} = \frac{b}{a-b} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{-(a-b)^2 - (a^2 - b^2)}{2(a-b)^2} = \frac{2ab - 2a^2}{2(a-b)^2} = \frac{-2a(a-b)}{2(a-b)^2} = \frac{-a}{a-b}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{b}{b-a} = 1 \Leftrightarrow b = b - a \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } \frac{b}{b-a} = -1 \Leftrightarrow b = -b + a \Leftrightarrow a = 2b,$$

$$\frac{-a}{a-b} = 1 \Leftrightarrow -a = a - b \Leftrightarrow 2a = b \text{ και } \frac{-a}{a-b} = -1 \Leftrightarrow -a = b - a \Leftrightarrow b = 0.$$

Επομένως, για τιμές των παραμέτρων a, b που ικανοποιούν τις υποθέσεις $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ και $a \neq \pm 1$, έχουμε:

- Αν $(a-2b)(2a-b) \neq 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες

$$x_1 = \frac{b}{a-b} \text{ και } x_2 = \frac{-a}{a-b}.$$

- Αν $a = 2b$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2 = -2$.
- Αν $a = \frac{b}{2}$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2 = -2$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 90^\circ$ και $\hat{A} < 45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και E των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$, αντίστοιχα, και σημείο $M \neq A$ στο ευθύγραμμο τμήμα AE . Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος BM τέμνει την ευθεία ΔE στο Z και την ευθεία $A\Gamma$ στο Θ , να αποδείξετε ότι:

(α) $B\hat{M}Z = \hat{A}$.

(β) Η ευθεία BZ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{B}E$.

Λύση

(α) Επειδή το Z ανήκει στη μεσοκάθετη του BM θα είναι $ZB = ZM$ και

$$B\hat{M}Z = M\hat{B}Z = \omega.$$

Επειδή είναι $\Delta E \parallel AB$ και $AB \perp B\Gamma$ έπεται ότι $\Delta E \perp B\Gamma$, δηλαδή η ευθεία ΔE είναι μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$. Αφού $Z \in B\Gamma$ θα είναι $ZB = Z\Gamma$ και

$$Z\hat{B}\Gamma = Z\hat{\Gamma}B = \varphi.$$

Επειδή $MZ = BZ = \Gamma Z$ θα είναι και

$$Z\hat{M}\Gamma = Z\hat{\Gamma}M = \theta.$$

Από το τρίγωνο $BM\Gamma$, λόγω των προηγούμενων ισοτήτων, έχουμε

$$M\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}M + \Gamma\hat{M}B = 180^\circ \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + 2\theta = 180^\circ$$

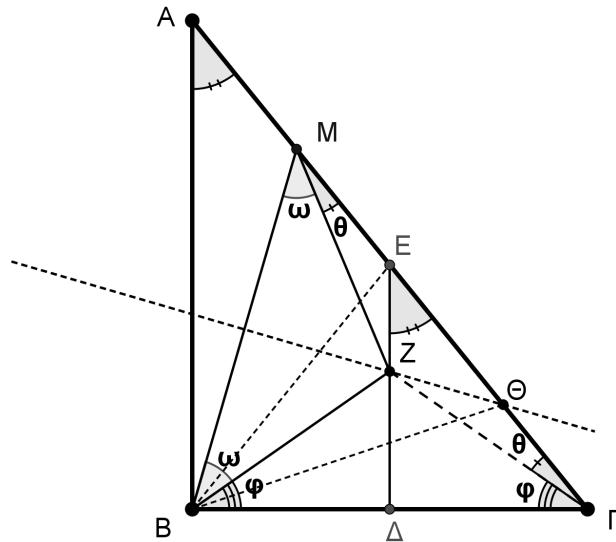
$$\omega + \varphi + \theta = 90^\circ. \quad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ λαμβάνουμε

$$\varphi + \theta = \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{A}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$B\hat{M}Z = \omega = \hat{A}.$$



Σχήμα 3

(β) Επειδή το σημείο Θ ανήκει στη μεσοκάθετη του BM η ΘZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Theta E}$. Επίσης, επειδή η BE είναι διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου ABΓ προς την υποτίγνουσα, θα είναι $BE = \frac{AG}{2} = EG$, οπότε το τρίγωνο BEΓ είναι ισοσκελές με την EΔ ύψος και διχοτόμο της γωνίας $\widehat{B\hat{E}G}$, άρα και της γωνίας $\widehat{B\hat{E}\Theta}$. Επομένως στο τρίγωνο BΘE το Z είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του, οπότε και η BZ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Theta B E}$.

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x, y, a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2 + (y^2 - a^2)x + y(y - a)^2 = 0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έστω ότι οι ακέραιοι x, y, a επαληθεύουν την εξίσωση: $yx^2 + (y^2 - a^2)x + y(y - a)^2 = 0$.

Μετά τις πράξεις και αναδιάταξη των όρων η εξίσωση, ως προς άγνωστο το a , γράφεται:

$$(y - x)a^2 - 2y^2a + y(x^2 + xy + y^2) = 0.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, η εξίσωση αυτή με άγνωστο το a έχει ακέραια λύση, αλλά και ακέραιους συντελεστές. Επομένως, η διακρίνουσα της είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, δηλαδή υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε

$$\Delta = 4y^4 - 4y(y - x)(x^2 + xy + y^2) = 4y[y^3 - (y^3 - x^3)] = 4yx^3 = xy(2x)^2 = \kappa^2.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι: $xy = \left(\frac{\kappa}{2x}\right)^2$, όπου ο αριθμός $\frac{\kappa}{2x}$ είναι ρητός.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a \neq 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{2a+ax} - \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2a+6}{x^3-4x},$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες με διαφορά 4.

Λύση

Μετά τις παραγοντοποιήσεις των όρων των κλασμάτων η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{a(x+2)} + \frac{1}{x(x-2)} = \frac{2(a+3)}{x(x-2)(x+2)}. \quad (1)$$

Πρέπει να ισχύουν $x \neq 0, \pm 2$, δηλαδή η εξίσωση θα λυθεί στο σύνολο $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$.

Η εξίσωση (1) στο σύνολο $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ είναι ισοδύναμη τελικά με την εξίσωση

$$x^2 + (a-2)x - (2a^2 + 4a) = 0,$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (3a+2)^2$ και ρίζες $x_1 = a+2$ και $x_2 = -2a$. Επειδή

$$a+2 \in \{-2, 0, 2\} \Leftrightarrow a \in \{-4, -2, 0\} \text{ και } -2a \in \{-2, 0, 2\} \Leftrightarrow a \in \{1, 0, -1\}$$

και αφού από την υπόθεση είναι $a \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες δεκτές, τις $x_1 = a-2$ και $x_2 = -2a$, όταν είναι $a \neq -1, +1, -2, -4$.

Επειδή είναι

$$|a+2 - (-2a)| = 4 \Leftrightarrow |3a+2| = 4 \Leftrightarrow 3a+2 = 4 \text{ ή } 3a+2 = -4 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3} \text{ ή } a = -2,$$

η τιμή του a που ζητάμε είναι η $a = \frac{2}{3}$.

Πρόβλημα 2

Αν y ακέραιος και $x \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (x, y) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 1+y-|x^2-3x+1| > 0 \\ y-2+|x-2| < 0 \end{cases}. \quad (\Sigma)$$

Να παραστήσετε γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Oxy , το σύνολο των σημείων $M(x, y)$, όπου (x, y) λύση του συστήματος (Σ) .

Λύση

Έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+y-|x^2-3x+1|>0 \\ y-2+|x-2|<0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+y>|x^2-3x+1|\geq 0 \\ y-2<-|x-2|\leq 0 \end{array} \right\},$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$1+y>0 \text{ και } y-2<0 \Leftrightarrow -1<y<2.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές του y είναι $y=0$ ή $y=1$.

- Για $y=0$, το σύστημα γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} |x^2-3x+1|<1 \\ |x-2|<2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1<x^2-3x+1<1 \\ -2<x-2<2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-3x+2>0 \text{ και } x^2-3x<0 \\ -2<x-2<2 \end{array} \right\}$$

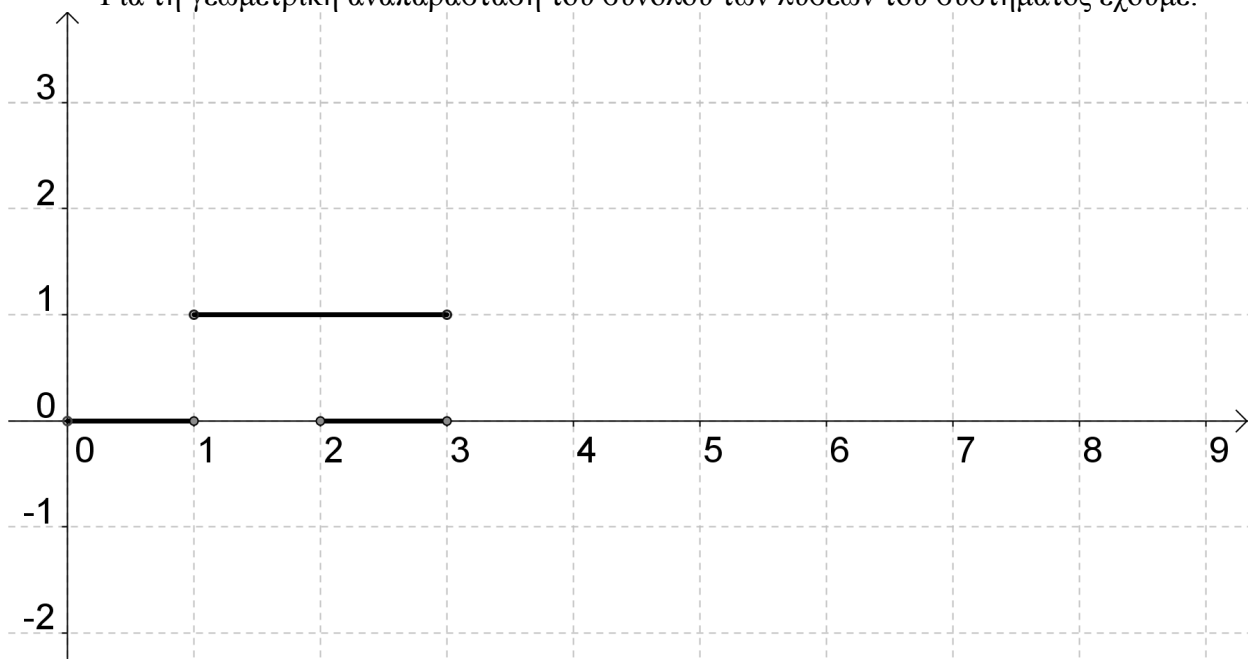
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x<1 \text{ ή } x>2) \text{ και } 0<x<3 \\ 0<x<4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 0<x<1 \text{ ή } 2<x<3.$$

- Για $y=1$, το σύστημα γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} |x^2-3x+1|<2 \\ |x-2|<1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2<x^2-3x+1<2 \\ -1<x-2<1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-3x+3>0 \text{ και } x^2-3x-1<0 \\ 1<x<3 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ 1<x<3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1<x<3.$$

Για τη γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου των λύσεων του συστήματος έχουμε:



Σχήμα 4

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο M . Ο κύκλος $c_1(M, AM)$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = AB$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

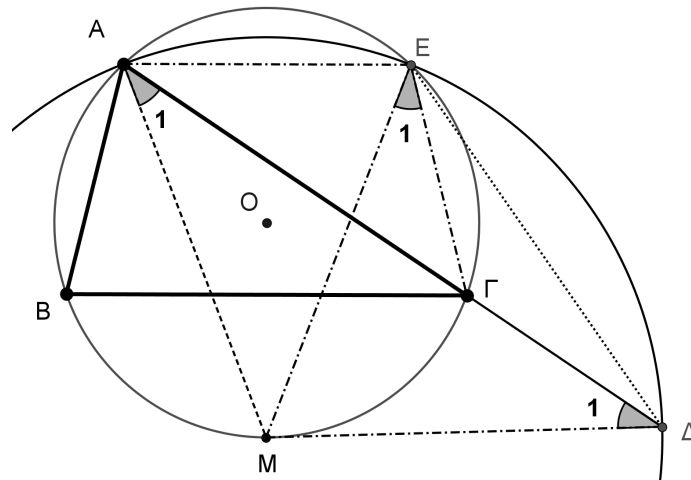
Έστω E το δεύτερο κοινό σημείο των περιφερειών (c) και (c_1) . Τότε η AE είναι η κοινή χορδή των δύο κύκλων, άρα η OM είναι μεσοκάθετη της AE .

Το M είναι το μέσο του τόξου $B\Gamma$ (διότι η AM είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A}). Άρα η OM είναι μεσοκάθετη και της $B\Gamma$.

Επειδή οι χορδές $B\Gamma$ και AE έχουν την OM κοινή μεσοκάθετη, συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε:

$$AB = E\Gamma. \quad (1)$$

Το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισοσκελές, αφού $MA = M\Delta$ ως ακτίνες του κύκλου (c_1) . Άρα είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$. Ισχύει επίσης $\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ (εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\widehat{M\Gamma}$).



Σχήμα 5

Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών συμπεραίνουμε ότι $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ και σε συνδυασμό με την ισότητα $M\hat{\Delta}E = M\hat{E}\Delta$ (που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο $M\Delta E$), καταλήγουμε στην ισότητα των γωνιών $\Gamma\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{E}\Delta$ και στην ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων:

$$E\Gamma = \Delta\Gamma. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

2^{ος} Τρόπος

Το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές ($MA = M\Delta$ ακτίνες του κύκλου (c_1)). Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} , οπότε έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}. \quad (3)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AM\Delta$, έχουμε:

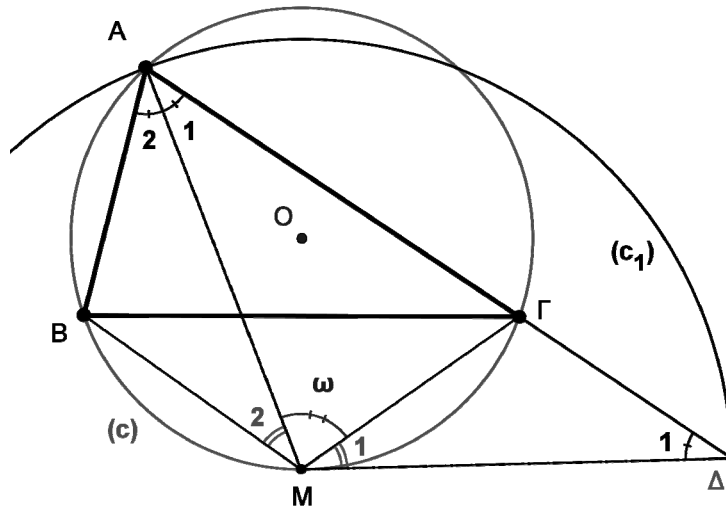
$$\begin{aligned} \hat{M}_1 + \hat{\omega} &= \hat{A}\hat{M}\Delta = 180^\circ - \hat{A}_1 - \hat{\Delta}_1 = 180^\circ - \hat{A} \\ \Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{\omega} &= 180^\circ - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{M}_1 = 180^\circ - \hat{A} - \hat{\omega}. \end{aligned} \quad (4)$$

Επίσης, ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$\hat{B} = \hat{\omega}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο).

Άρα έχουμε $\hat{M}_1 = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{M}_2. \quad (5)$



Σχήμα 6

Από τις ισότητες: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, $MB = M\Gamma$ (διότι το M είναι μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$) και $MA = M\Delta$ (διότι $MA, M\Delta$ ακτίνες του κύκλου (c_1)), συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα MAB και $M\Delta\Gamma$ (*) είναι ίσα, οπότε $\Gamma\Delta = AB$.

(*) Η ισότητα των τριγώνων, μπορεί να αποδειχθεί και με άλλους τρόπους.

Παρατηρήσεις

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία M, Γ και το μέσο της ΔE είναι συνευθειακά.

Ο κύκλος (c_1) τέμνει και τη προέκταση της AB . Αν ονομάσουμε Λ το σημείο τομής, τότε θα ισχύει $B\Lambda = A\Gamma$. Έτσι δημιουργείτε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta\Lambda\Lambda$ με $\Delta\Lambda = \Lambda\Lambda = AB + A\Gamma$ και στη συνέχεια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $AM \perp \Delta\Lambda$.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{x^2 + ax + b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 4b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2 - 4b < 0$, έπεται ότι $x^2 + ax + b > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί $x, \sqrt{x^2 + ax + b} = y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά τους $y - x = r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{x^2 + ax + b} - x = r \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + ax + b} = x + r \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + 2rx + r^2 \Rightarrow x = \frac{r^2 - b}{a - 2r},$$

εφόσον $r \neq \frac{a}{2}$. Αντίστροφα, αν είναι $x = \frac{r^2 - b}{a - 2r}$, όπου r ρητός με $r \neq \frac{a}{2}$, τότε έχουμε

$$x^2 + ax + b = \left(\frac{r^2 - b}{a - 2r}\right)^2 + a \frac{r^2 - b}{a - 2r} + b = \frac{r^4 - 2ar^3 + a^2r^2 + 2br^2 - 2abr + b^2}{(a - 2r)^2} = \frac{(r^2 - ar + b)^2}{(a - 2r)^2},$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2 - 4b < 0$, θα είναι

$$y = \sqrt{x^2 + ax + b} = \frac{r^2 - ar + b}{|a - 2r|}, \quad r \neq \frac{a}{2},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γ' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν , $\nu = 1, 2, 3, \dots$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha \neq 0$, διαφορά $\omega \neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1 + \dots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{\nu+1} + \dots + \alpha_{3\nu}$ των επόμενων 2ν το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του ν .

Λύση

Από την υπόθεση δίνεται ότι:

$$\frac{\Sigma_\nu}{\Sigma_{3\nu} - \Sigma_\nu} = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1} + \dots + \alpha_{3\nu}} = c \text{ (ανεξάρτητο του } \nu). \quad (1)$$

Επειδή είναι

$$\Sigma_\nu = \alpha_1 + \dots + \alpha_\nu = \frac{[2\alpha + (\nu-1)\omega] \cdot \nu}{2} \text{ και}$$

$$\Sigma_{3\nu} - \Sigma_\nu = \frac{[2\alpha + (3\nu-1)\omega] \cdot 3\nu}{2} - \frac{[2\alpha + (\nu-1)\omega] \cdot \nu}{2} = \frac{[4\alpha + (8\nu-2)\omega] \cdot \nu}{2},$$

η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{2\alpha + (\nu-1)\omega}{4\alpha + (8\nu-2)\omega} = c \Leftrightarrow (8c\omega - \omega)\nu + 4\alpha c - 2\alpha - 2c\omega + \omega = 0$$

$$\Leftrightarrow (8c-1)\omega\nu + (2c-1)(2\alpha - \omega) = 0, \text{ για κάθε } \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Στην τελευταία ισότητα θεωρούμε $\nu = 1$ και $\nu = 2$ και αφαιρούμε κατά μέλη τις ισότητες που προκύπτουν, οπότε λαμβάνουμε $(8c-1)\omega = 0$ και από αυτή $(2c-1)(2\alpha - \omega) = 0$, οπότε έχουμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} (8c-1)\omega = 0 \\ (2c-1)(2\alpha - \omega) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1}{8} \\ \omega = 2\alpha \end{array} \right\}, \text{ αφού } \omega \neq 0.$$

Επομένως η αριθμητική πρόοδος που ζητάμε είναι η: $\alpha, 3\alpha, 5\alpha, \dots, (2\nu-1)\alpha, \dots$

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4}, \quad y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4}, \quad z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4} = z^2 \cdot \frac{8z^2}{4^2+(z^2)^2} \leq z^2, \text{ αφού ισχύει: } \frac{8z^2}{4^2+(z^2)^2} \leq 1,$$

και ομοίως λαμβάνουμε ότι: $z^2 \leq y^2$ και $y^2 \leq x^2$. Επομένως, έχουμε: $x^2 = y^2 = z^2$.

Τότε από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$x^2 = \frac{8x^4}{16+x^4} \Leftrightarrow x^2(x^4 - 8x^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 2 \text{ (όλες με πολλαπλότητα 2).}$$

- Για $x = 0$, προκύπτει η λύση $(0, 0, 0)$.
- Για $x = 2$, προκύπτουν οι λύσεις: $(2, 2, 2), (2, -2, 2), (2, 2, -2)$ και $(2, -2, -2)$.
- Για $x = -2$, προκύπτουν οι λύσεις: $(-2, 2, 2), (-2, -2, 2), (-2, 2, -2)$ και $(-2, -2, -2)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Τα ύψη του $AD, BE, \Gamma Z$ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα. Αν A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων OD, OE, OZ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

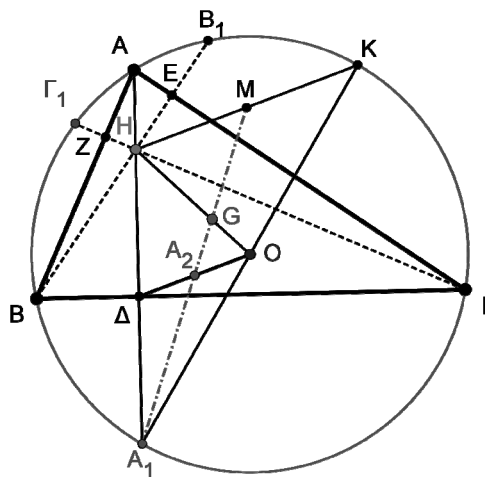
Λύση

(1^{ος} τρόπος)

Παρατηρούμε ότι το σημείο A_1 είναι συμμετρικό του ορθοκέντρου H ως προς την πλευρά $B\Gamma$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το σημείο H_1 συμμετρικό του H ως προς την πλευρά $B\Gamma$, τότε έχουμε $B\hat{H}_1\Gamma = B\hat{H}\Gamma = 180^\circ - \hat{A}$. Άρα το τετράπλευρο $ABH_1\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε το σημείο H_1 συμπίπτει με το σημείο A_1 .

Έστω K το αντιδιαμετρικό του σημείου A_1 και M το σημείο τομής της A_1A_2 με την HK . Τότε στο τρίγωνο A_1HK έχουμε ότι το σημείο O είναι μέσο της πλευράς A_1K και ότι το σημείο Δ είναι μέσο της πλευράς A_1H . (*) Άρα το τμήμα $O\Delta$ είναι ίσο και παράλληλο με το τμή-

μα $\frac{HK}{2}$.

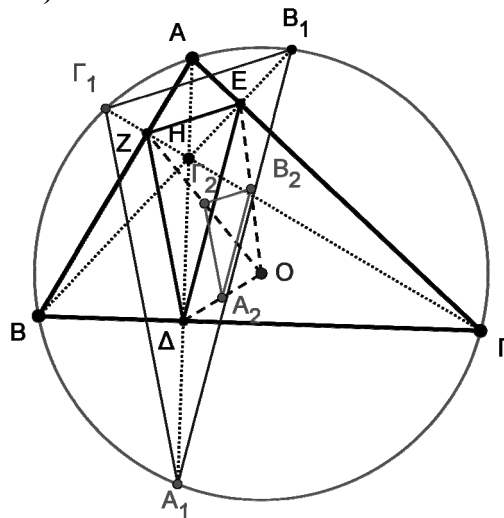


Σχήμα 7

Επειδή τώρα $OD = \frac{HK}{2}$ και η A_1A_2 είναι διάμεσος στο τρίγωνο A_1OA , συμπεραίνουμε ότι η A_1M είναι διάμεσος του τριγώνου A_1HK . Έστω ότι οι διάμεσες A_1M και HO (του τριγώνου A_1HK) τέμνονται στο σημείο G . Τότε θα ισχύει $GH = 2GO$, δηλαδή το σημείο G χωρίζει το τμήμα HO σε δύο τμήματα με λόγο 2:1.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι $B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ διέρχονται από το σημείο G .

2^{ος} τρόπος (με ομοιοθεσία)



Σχήμα 8

Χρησιμοποιώντας τη πρόταση: “Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του, βρίσκονται στο περιγεγραμμένο κύκλο του”, που αποδείξαμε στην αρχή της προηγούμενης λύσης, συμπεραίνουμε ότι το Δ είναι μέσο του A_1H , το E είναι μέσο του B_1H και το Z είναι μέσο του Γ_1H .

Άρα το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι ομοίθετο του (ορθικού) τριγώνου ΔEZ στην ομοιοθεσία με κέντρο το ορθόκεντρο H και λόγο 2, ($HA_1 = 2H\Delta$).

Το A_2 είναι μέσο του OD , το B_2 είναι μέσο του OE και το Γ_2 είναι μέσο του OZ .

Άρα το ορθικό τρίγωνο ΔEZ , είναι ομοίθετο του τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το O και λόγο 2, ($OD = 2OA_2$), δηλαδή το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ είναι ομοίθετο του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$.

Άρα οι ευθείες $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ (που συνδέουν τις ομόλογες κορυφές) θα συντρέχουν στο κέντρο της ομοιοθεσίας (έστω K) το οποίο θα βρίσκεται επάνω στην OH .

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2 - ax + b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 16b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2 - 16b < 0$, έπεται ότι $4x^2 - ax + b > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί $x, \sqrt{4x^2 - ax + b} = y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά $y - 2x = r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{4x^2 - ax + b} - 2x = r \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - ax + b} = 2x + r \Rightarrow 4x^2 - ax + b = 4x^2 + 4rx + r^2 \Rightarrow x = \frac{b - r^2}{a + 4r},$$

εφόσον $r \neq -\frac{a}{4}$.

Αντίστροφα, αν είναι $x = \frac{b - r^2}{a + 4r}$, όπου r ρητός με $r \neq -\frac{a}{4}$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} 4x^2 - ax + b &= 4\left(\frac{b - r^2}{a + 4r}\right)^2 - \frac{a(b - r^2)}{a + 4r} + b \\ &= \frac{4r^4 + a^2r^2 + 4b^2 + 8br^2 + 4abr + 4ar^3}{(a + 4r)^2} = \frac{(2r^2 + ar + 2b)^2}{(a + 4r)^2}, \end{aligned}$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2 - 16b < 0$, θα είναι

$$y = \sqrt{4x^2 - ax + b} = \frac{2r^2 + ar + 2b}{|a + 4r|}, \quad r \neq -\frac{a}{4},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.