ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, με $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 120^\circ$, στο οποίο η διάμεσος $\mathrm{A\Delta}$ είναι κάθετη προς την πλευρά AB και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ στο σημείο E. Οι ευθείες BA και $\mathrm{E\Gamma}$ τέμνονται στο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{Z\Delta} \perp \mathrm{BE}$, **(β)** $\mathrm{Z\Delta} = \mathrm{B\Gamma}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τους οποίους λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3\nu + 1$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του ν με το 7,

(β) του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m > 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3y^2\left(2y-x\right)=x^2y^4-36.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathrm{O}xy$ θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_1(40,1)$, $\mathrm{A}_2(40,2)$, …, $\mathrm{A}_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{OA}_1,\mathrm{OA}_2,\ldots,\mathrm{OA}_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$ θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\ldots,40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{OA}_1,\mathrm{OA}_2,\ldots,\mathrm{OA}_{40}$, θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "*καλό*" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "*καλών*" σημείων και το πλήθος των "*καλών*" ευθυγράμμων τμημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

$$MZ\perp BC \Leftrightarrow \left(CA=CB \quad \text{ή} \quad Z\equiv O\right),$$

δηλαδή ότι "η MZ είναι κάθετη στην BC, αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA=CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$".

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 30 λεπτά ***Καλή επιτυχία***
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες