



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{74 \cdot 3}{9 \cdot 37} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 : 8 \\ &= \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16}{9} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16 : 8}{9} = \frac{13}{9} - \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α και Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200 - x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100}$

ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $(200 - x) \cdot \frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο

ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200 \cdot \frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{125x}{100} + (200 - x) \cdot \frac{150}{100} &= 200 \cdot \frac{140}{100} \Leftrightarrow 12,5x - 15x + 3000 = 2800 \\ &\Leftrightarrow 2,5x = 200 \Leftrightarrow x = 80. \end{aligned}$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200 - 80 = 120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:
(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015} = 1 - \frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019} = 1 - \frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021} = 1 - \frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009} = 1 - \frac{1012}{2009}$$
$$\frac{1011}{2023} = 1 - \frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011} = 1 - \frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013} = 1 - \frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017} = 1 - \frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{2012}{2009} > \frac{2012}{2011} > \frac{2012}{2013} > \frac{2012}{2015} > \frac{2012}{2017} > \frac{2012}{2019} > \frac{2012}{2021} > \frac{2012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1 - \frac{2012}{2009} < 1 - \frac{2012}{2011} < 1 - \frac{2012}{2013} < 1 - \frac{2012}{2015} < 1 - \frac{2012}{2017} < 1 - \frac{2012}{2019} < 1 - \frac{2012}{2021} < 1 - \frac{2012}{2023},$$

οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς,

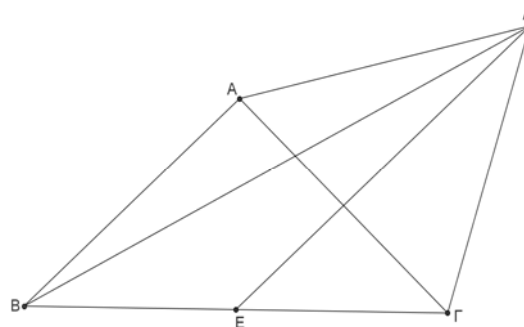
ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = AG$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

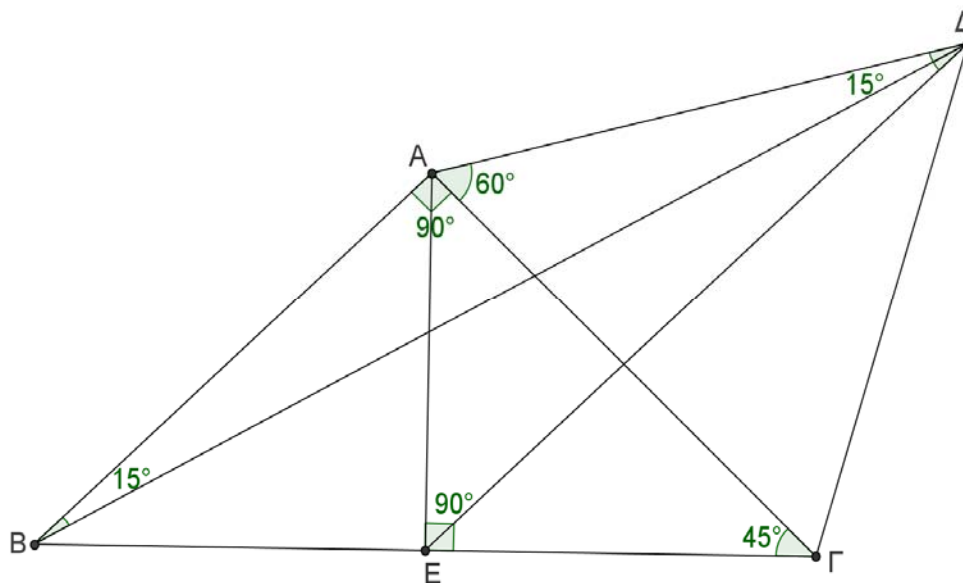
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία ΒΔΕ.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και η διάμεσός του AE είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο AEG είναι ορθογώνιο στο E με μία γωνία του 45° . Επομένως θα έχει $\hat{EAG} = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $EA = EG$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε ότι: $\Delta A = \Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τα άκρα A και Γ του ευθύγραμμου τμήματος AG , οπότε η ευθεία DE είναι η μεσοκάθετη του AG .

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ λαμβάνουμε τις ισότητες $AB = A\Gamma = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε $\hat{\Delta A\Gamma} = 60^\circ$, οπότε $\hat{\Delta AB} = \hat{\Delta A\Gamma} + \hat{\Gamma AB} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Επειδή $AB\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$\hat{A\Delta B} = \hat{A\Delta\Gamma} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες AB και DE είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία AG , που τις τέμνει η ευθεία BD , σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$\hat{B\Delta E} = \hat{A\Delta B} = 15^\circ$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$, αν $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13},$$

οπότε για $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{256}{81} - 1}{\frac{256}{81} - 3} - \frac{6}{13} = \frac{175}{13} - \frac{6}{13} = \frac{169}{13} = 13.$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\frac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4n}{100} = \frac{4n}{300} = \frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n = 75k$, όπου k θετικός ακέραιος..

Έτσι, από την υπόθεση $170 \leq n \leq 230$, έχουμε:

$$170 \leq n = 75k \leq 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75} \leq k \leq \frac{230}{75} \Leftrightarrow 2 + \frac{20}{75} \leq k \leq 3 + \frac{5}{75} \Leftrightarrow k = 3.$$

Επομένως έχουμε $n = 75 \cdot 3 = 225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευρά a . Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Delta$. Αν $E(AB\Delta)$ και $E(AB\Delta Z)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και του τετραπλεύρου $AB\Delta Z$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$.

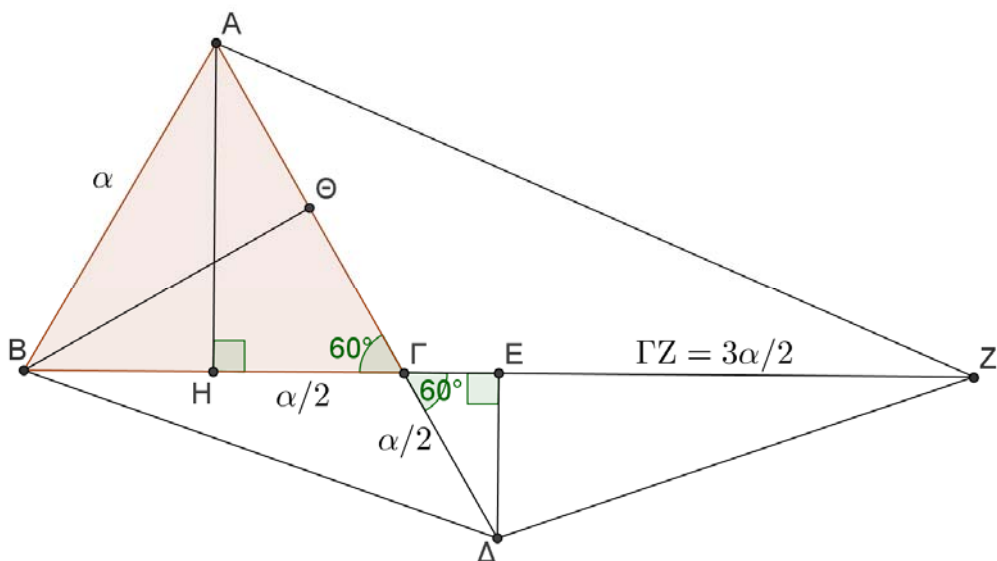
Λύση

Το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει βάση $A\Delta = \frac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$B\Theta = AH = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot A\Delta \cdot B\Theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο $AB\Delta Z$ έχουμε: $E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z)$.

Στο τρίγωνο ABZ έχουμε βάση $BZ = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $AH = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$E(ABZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο $B\Delta Z$ έχουμε βάση $BZ = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος ΔE το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Gamma E\Delta$ ως εξής:

$$\frac{E\Delta}{AH} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E\Delta}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $E\Delta = \Gamma\Delta \eta\mu 60^\circ = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$.

Άρα έχουμε:

$$E(B\Delta Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι

ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 .

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα.

Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2} = \frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2} = \lambda$$
$$\Rightarrow \alpha(\Delta) = \lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1) = \lambda\beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2) = \lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2 + \lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2 + \beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{3} = \frac{\beta(\Delta_2)}{7} = \frac{\beta(\Delta_1) + \beta(\Delta_2)}{3+7} = \frac{\beta(\Delta)}{10}$$
$$\Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} = \frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} = \frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2 + \left(\frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά $100 - 58 = 42\%$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 + 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2}.$$

Λύση

Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε $x = 2014$, η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(x+1)^3 + (x-1)^3}{x^2 + (2x+1)^2} + \frac{(x+2)^3 + (x-2)^3 - 18x}{x^2 + (2x-1)^2} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+1)^2 - (4x)^2} \\
&= \frac{2x(x^2+3)}{5x^2+4x+1} + \frac{2x(x^2+3)}{5x^2-4x+1} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \\
&= 2x(x^2+3) \left[\frac{1}{5x^2+4x+1} + \frac{1}{5x^2-4x+1} - \frac{2(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right] \\
&= 2x(x^2+3) \left(\frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right) = 2x(x^2+3) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα είναι

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 - 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2} = 0$$

Πρόβλημα 2

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Λύση

Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι x ευρώ και τόμου Β είναι y ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x + 120y = 4000 \Leftrightarrow 5x + 6y = 200 \quad (1)$$

$$50 \cdot \frac{90x}{100} + 60 \cdot \frac{80y}{100} = 1680 \Leftrightarrow 45x + 48y = 1680 \quad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} 5x + 6y = 200 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 45x + 54y = 1800 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y = 120 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = \frac{1680 - 48y}{45} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = 16 \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (x^2 + y^2 + xy)^2 \quad \text{και} \quad B = 2 \left[(x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4 \right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση A ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός \sqrt{B} είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y .

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 + (xy)^2 + 2(x^2 + y^2)xy \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2xy)^2 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4, \\ B &= 2 \left[(x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4 \right] = 2 \left[x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + x^4 + y^4 \right] \\ &= 2 \left[2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 \right] = 4(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4) \\ &= 4(x^2 + y^2 + xy)^2, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{B} = \left| 2(x^2 + xy + y^2) \right| = 2(x^2 + xy + y^2) \in \mathbb{Q},$$

αφού οι αριθμοί x, y είναι ρητοί και $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$.

Πρόβλημα 4

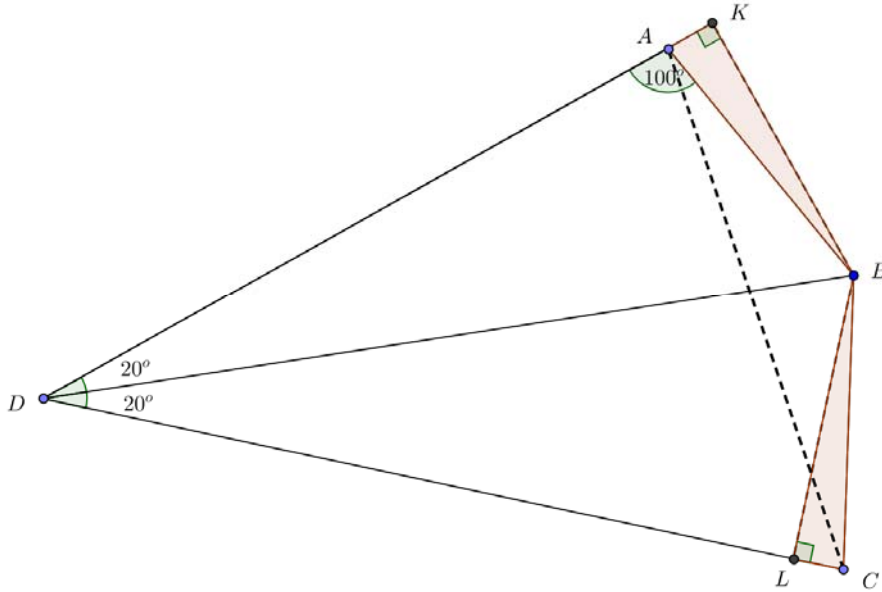
Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A} = 100^\circ$ και $\hat{D} = 40^\circ$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{CDA} και $DB = DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας \hat{CAB} .

Λύση

Εφόσον η DB είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{CDA} , θα έχουμε ότι $\hat{CDB} = \hat{BDA} = 20^\circ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο DBC θα έχουμε ότι $\hat{DBC} = \hat{DCB} = 80^\circ$ και επιπλέον έχουμε ότι $\hat{DBA} = 180^\circ - (100^\circ + 20^\circ) = 60^\circ$. Αν τώρα φέρουμε τις προβολές BK και BL ,

αφού το B είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι $BK = BL$ και $\hat{BAK} = 80^\circ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAK και BLC είναι ίσα, που σημαίνει ότι $BA = BC$.

Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο BAC παίρνουμε ότι: $\hat{CAB} = 20^\circ$.



Σχήμα 4

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$A = \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} \quad \text{και} \quad B = \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1}.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} - \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1} = \frac{(x^k + 1)(x^{k+2} + 1) - (x^{k+1} + 1)^2}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} \\ &= \frac{x^{k+2} + x^k + 1 - 2x^{k+1} - 1}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} = \frac{x^{k+2} + x^k - 2x^{k+1}}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} = \frac{x^k (x-1)^2}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)}, \end{aligned}$$

οπότε, αφού $x > 0$ και k ακέραιος, έχουμε:

$$A - B = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 1 \\ > 0, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, & \text{αν } x = 1 \\ A > B, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \end{cases}.$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{(x^k + 1)(x^{k+2} + 1)}{(x^{k+1} + 1)^2} = \frac{x^{2k+2} + x^k + x^{k+2} + 1}{(x^{k+1} + 1)^2} \\ &= 1 + \frac{x^{k+2} + x^k - 2x^{k+1}}{(x^{k+1} + 1)^2} = 1 + \frac{x^k (x-1)^2}{(x^{k+1} + 1)^2} \geq 1. \end{aligned}$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν, $x = 1$.

Επομένως έχουμε ότι:

$$A = B, \text{ αν } x = 1 \text{ και } A > B, \text{ αν } 0 < x \neq 1.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 + 2|x - y| = 5$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 5 - 2|x - y| \quad (1)$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 2\left(x^2 - 5xy + \frac{25y^2}{4}\right) + 13y^2 - \frac{25y^2}{2} = 2\left(x - \frac{5y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν: $x - \frac{5y}{2} = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5 - 2|x - y| \geq 0 \Leftrightarrow |x - y| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow |x - y| \in \{0, 1, 2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1. $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2 - 10x^2 + 13x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $(x, y) = (-1, -1)$ ή $(x, y) = (1, 1)$.

2. $|x - y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1$ ή $x - y = -1 \Leftrightarrow x = y + 1$ ή $x = y - 1$.

Για $x = y \pm 1$ η εξίσωση γίνεται: $2(y \pm 1)^2 - 10(y \pm 1)y + 13y^2 = 3$

$\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 56$

3. $|x - y| = 2 \Leftrightarrow x - y = 2$ ή $x - y = -2 \Leftrightarrow x = y + 2$ ή $x = y - 2$.

Για $x = y + 2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y + 2)^2 - 10(y + 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = \frac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (3, 1)$

Για $x = y - 2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y - 2)^2 - 10(y - 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = -\frac{7}{5}$.

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (-3, -1)$.

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: $(-1, -1), (1, 1), (3, 1), (-3, -1)$.

Πρόβλημα 3

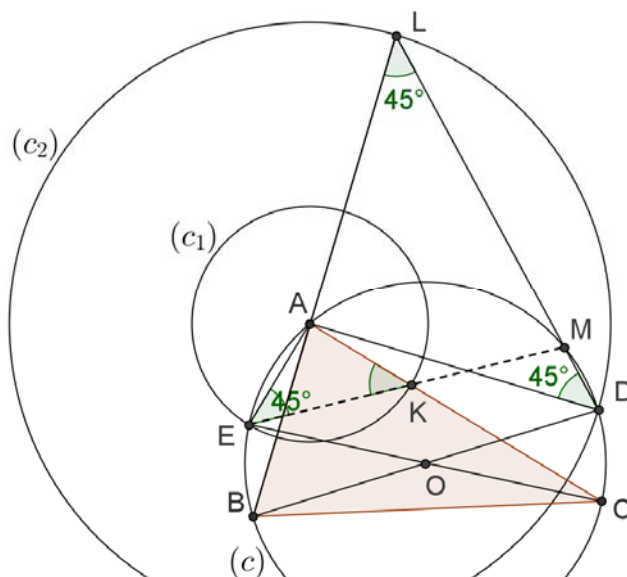
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C , αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K . Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο A και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του A) στο σημείο L . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται πάνω στο κύκλο (c) .

Λύση

Έστω M το σημείο τομής της DL με τον κύκλο (c) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία E, K, M βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.

Η γωνία \hat{EAC} είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο EC του κύκλου (c) . Το τρίγωνο AEK είναι ισοσκελές (διότι AE, AK είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα:

$$\hat{AEK} = \hat{AKE} = 45^\circ. \quad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία \hat{BAD} είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο BD του κύκλου (c) , οπότε και η γωνία \hat{DAL} είναι ορθή. Το τρίγωνο ADL είναι ισοσκελές (διότι AD, AL είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)). Άρα έχουμε

$$\hat{ADL} = \hat{ALD} = 45^\circ. \quad (2)$$

Οι γωνίες $\hat{ADM} = \hat{ADL}$ και \hat{AEM} είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο \widehat{AM} , δηλαδή

$$\hat{AEM} = \hat{ADL} \quad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα $\hat{AEK} = \hat{AEM} = 45^\circ$, οπότε τα σημεία E, K, M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Λύση

Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση

$$\Sigma_x \geq 8 \cdot 100 + (x - 8) \cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x + 240, \quad (1)$$

οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq \frac{70x + 240}{x} = 70 + \frac{240}{x}. \quad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x < 30$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_x}{x} \geq 70 + \frac{240}{x} > 70 + \frac{240}{30} = 78, \quad (3)$$

που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.

Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $x < 30$, οπότε πρέπει να είναι $x \geq 30$.

Παρατηρούμε ότι για $x = 30$, έχουμε την περίπτωση

$$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_{30}}{30} = \frac{8 \cdot 100 + (30 - 8) \cdot 70}{30} = \frac{30 \cdot 70 + 8 \cdot 30}{30} = 70 + 8 = 78,$$

οπότε η ελάχιστη δυνατή τιμή του x είναι 30.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ με τον άξονα των x είναι της μορφής $A_1(x_1, 0)$ και $A_2(x_2, 0)$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (3\alpha - 5)x + 186 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Άρα έχουμε:

$$x_1 + x_2 = 3\alpha - 5, \quad (1)$$

$$x_1 x_2 = 186 \quad (2)$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω $|x_1| < |x_2|$, από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι x_1, x_2 πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι, με γινόμενο $186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$. Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$(x_1, x_2) \in \{(1, 186), (2, 93), (3, 62), (6, 31), (-1, -186), (-2, -93), (-3, -62), (-6, -31)\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3}$, οπότε οι δυνατές τιμές για την παράμετρο $\alpha \in \mathbb{Z}$ είναι οι εξής: 64, 14, -30, -20.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το x^2y^2 η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

Επομένως, έχουμε $x^2 + y^2 - xy = \frac{91}{13} = 7$. Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη

εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι: $2(x^2 + y^2) = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$, οπότε

$xy = 3$ από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 16 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 16 \\ (x-y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 4 \\ x-y = \pm 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = -4 \\ x-y = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = -2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = -4 \\ x-y = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & (x, y) = (3, 1) \text{ ή } (x, y) = (-1, -3) \text{ ή } (x, y) = (1, 3) \text{ ή } (x, y) = (-3, -1). \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases},$$

οπότε, αν θέσουμε $\varphi = x^2 + y^2$ και $\omega = xy$, λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \varphi^2 - \omega^2 = 91 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi + \omega)(\varphi - \omega) = 91 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \varphi - \omega = 7 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 10 \\ \omega = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$). Η διχοτόμος $B\Delta$ τέμνει τον κύκλο $C(O, R)$, στο σημείο Z . Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο H . Οι ευθείες $A\Gamma$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ . Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $B\Delta H\Theta$, $B\Delta EK$ και $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμα.

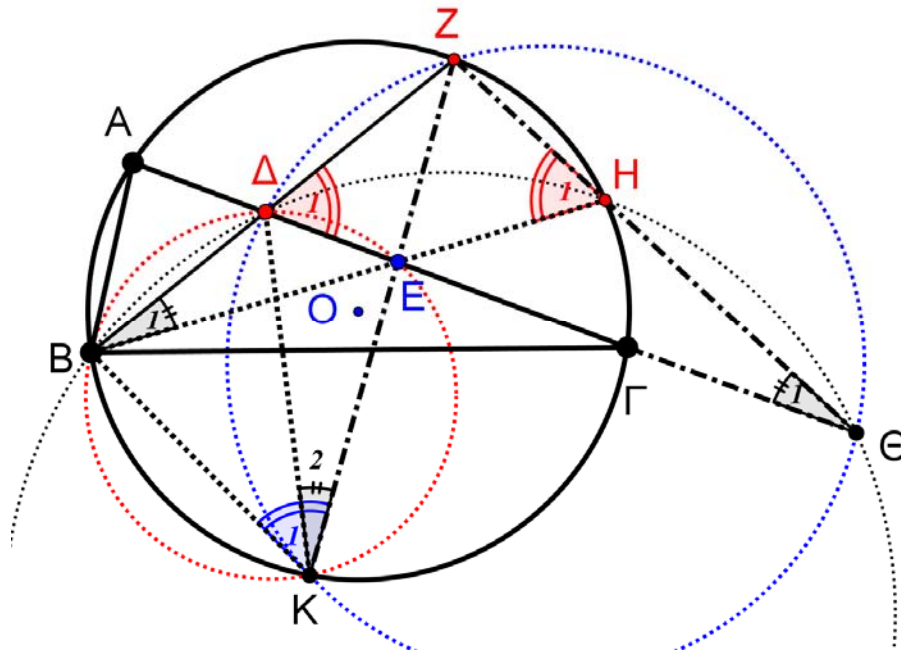
Λύση

Η γωνία \hat{H}_1 είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(O, R)$ και βαίνει στο τόξο BZ .
 Άρα:

$$\hat{H}_1 = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta Z$. Άρα:

$$\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}Z + A\hat{Z}B = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma}.$$



Σχήμα 6

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, προκύπτει η ισότητα των παραπληρωματικών τους γωνιών και από εκεί ότι **το τετράπλευρο $B\Delta H\Theta$ είναι εγγράψιμο.**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BKHZ$ έχουμε: $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$, η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, μας δίνει **την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου $B\Delta EK$.**

Από το εγγράψιμο $B\Delta EK$ έχουμε: $\hat{K}_2 = \hat{B}_1$. Από το εγγράψιμο $B\Delta H\Theta$ έχουμε: $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1$. Άρα είναι: $\hat{K}_2 = \hat{\Theta}_1$.

Επομένως και **το τετράπλευρο $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμο.**

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n , που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Λύση

Για τους τέσσερις διαιρέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$d_1 = 1, d_4 = n \text{ και } d_2 \cdot d_3 = n.$$

Επομένως, έχουμε

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640 \Leftrightarrow 1 + d_2 + d_3 + d_2 d_3 = 640$$

$$\Leftrightarrow (1 + d_2)(1 + d_3) = 640 \Leftrightarrow (1 + d_2)(1 + d_3) = 2^7 \cdot 5$$

Αλλά $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 \Rightarrow 2 < 1 + d_2 < 1 + d_3$ και επειδή οι d_2 και d_3 είναι ακέραιοι αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + d_2 = 4, 1 + d_3 = 160 \Leftrightarrow d_2 = 3, d_3 = 159 = 3 \cdot 53$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 3 \cdot 159$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 5, 1 + d_3 = 128 \Leftrightarrow d_2 = 4, d_3 = 127$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 4 \cdot 127$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 8, 1 + d_3 = 80 \Leftrightarrow d_2 = 7, d_3 = 79$, οπότε είναι $n = 7 \cdot 79 = 553$
- $1 + d_2 = 10, 1 + d_3 = 64 \Leftrightarrow d_2 = 9, d_3 = 63$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 9 \cdot 63$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 16, 1 + d_3 = 40 \Leftrightarrow d_2 = 15, d_3 = 39$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 15 \cdot 39$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 20, 1 + d_3 = 32 \Leftrightarrow d_2 = 19, d_3 = 31$, οπότε είναι $n = 19 \cdot 31 = 589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.