ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΚΕΡΚΥΡΑΣ

2ος όροφος Δημοτικού Θεάτρου
49100 Κέρκυρα

e-mail: emekerkyra@dide.ker.sch.gr

Greek Mathematical Society
Branch of Corfu

2nd floor Public Theater of Corfu
49100, Corfu Greece

e-mail: emekerkyra@dide.ker.sch.gr

Σάββατο 09 Νοεμβρίου 2019

3ος ΤΟΠΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
«ΚΩΣΤΑΣ ΖΕΡΒΟΣ»

Α΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1ο

1. *Να βρείτε την τιμή της παράστασης:*

$$A = \frac{10}{7} + \frac{9}{8} - \frac{9}{21} - \frac{3}{24}$$

(1 μονάδα)

2. *Ποιος φυσικός αριθμός πρέπει να μπει μέσα στις αγκύλες, ώστε να είναι σωστή η διάταξη των παρακάτω κλασμάτων; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*

$$\frac{3}{5} < \frac{[\;]}{7} < \frac{4}{5}$$

(3 μονάδες)

ΛΥΣΗ

1.

$$A = \frac{10}{7} + \frac{9}{8} - \frac{9}{21} - \frac{3}{24} =$$
$$= \frac{10}{7} + \frac{9}{8} - \frac{3}{7} - \frac{1}{8} = \frac{7}{7} + \frac{8}{8} = 1 + 1 = 2$$

2.

Α΄ τρόπος

Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{3}{5} < \frac{x}{7} < \frac{4}{5}$$

$$\frac{21}{35} < \frac{5x}{35} < \frac{28}{35}$$

$$21 < 5x < 28$$

Το 25 είναι το μοναδικό πολλαπλάσιο του 5 που είναι μεταξύ 21 και 28. Άρα 5x=25 και επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι το 5.

Β′ τρόπος

Επειδή $\frac{7}{7} > 1 > \frac{4}{5}$ και $\frac{3}{7} < 0.5 < \frac{3}{5}$, ο ζητούμενος φυσικός αριθμός θα είναι ένας εκ των 4,5,6.

Με μετατροπή σε δεκαδικούς έχουμε ότι $\frac{3}{5}$ = 0,6 και $\frac{4}{5}$ = 0,8.

Με διαιρέσεις έχουμε ότι 4:7 = 0,5… 5:7=0,7... και 6:7 = 0,8…

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι το 5.

Πρόβλημα 2ο

Σε μία τράπεζα υπάρχουν 3 ταμεία, το ταμείο Α, το ταμείο Β και το ταμείο Γ. Στην τράπεζα έχει υπολογιστεί ότι κάθε 15 λεπτά μπαίνει πελάτης ο οποίος πάει στο ταμείο Α, κάθε 12 λεπτά πελάτης στο ταμείο Β και κάθε 20 λεπτά πελάτης στο ταμείο Γ. Αν μπήκαν ταυτόχρονα στην τράπεζα 3 πελάτες ένας για κάθε ταμείο, να βρείτε :

1. Πότε θα ξαναμπούν ταυτόχρονα πελάτες και για τα 3 ταμεία. (1 μονάδα)
2. Πόσες φορές θα έχει εμφανιστεί στην τράπεζα πελάτης για το ταμείο Α, το ταμείο Β και το ταμείο Γ ξεχωριστά στο χρόνο που μεσολαβεί από την πρώτη φορά που μπήκαν ταυτόχρονα 3 πελάτες ένας για κάθε ταμείο εώς την δεύτερη φορά που θα συμβεί το ίδιο. (3 μονάδες)

ΛΥΣΗ

1. Στο ταμείο Α μπαίνει πελάτης κάθε 15 λεπτά, στο ταμείο Β κάθε 12 λεπτά και στο ταμείο Γ κάθε 20 λεπτά. Οι πελάτες θα μπαίνουν ταυτόχρονα στην τράπεζα στα λεπτά που αντιστοιχούν στα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 15,12,20 και συγκεκριμένα η επόμενη φορά που θα ξαναμπούν ταυτόχρονα θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο αυτών των αριθμών. ΕΚΠ(12,15,20) = 60.

Επομένως θα μπούν ξανά ταυτόχρονα στην τράπεζα πελάτες και για τα 3 ταμεία σε 60 λεπτά.

2. Για να βρούμε πόσες φορές θα έχει εμφανιστεί πελάτης για το κάθε ταμείο στο διάστημα που μεσολαβεί αρκεί να βρούμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης που μας δίνει ο χρόνος που αντιστοιχεί στην είσοδο του πελάτη για το κάθε ταμείο με το ΕΚΠ δηλαδή τον χρόνο που θα συναντηθούν ξανά. Για το ταμείο Α έχω 60:15 =4 φορές θα μπεί πελάτης. Για το ταμείο Β, 60:12 = 5 φορές και για το ταμείο Γ, 60:20 = 3 φορές.

Πρόβλημα 3ο

Ένας μαθητής παίζει ένα παιχνίδι 20 ερωτήσεων. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 2 βαθμούς ενώ για κάθε λανθασμένη χάνει έναν βαθμό. Αν κέρδισε συνολικα 16 βαθμούς, σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λανθασμένα; *(4 μονάδες)*

ΛΥΣΗ

Α' τρόπος

Συμβολίζοντας με x τις σωστές απαντήσεις, οι λάθος απαντήσεις θα είναι 20-x. Αφού για κάθε σωστή απάντηση ο μαθητής κερδίζει 2 βαθμούς, οι βαθμοί που θα κερδίσει συνολικά θα είναι 2•x και οι βαθμοί που θα χάσει 20-x διότι για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 1 βαθμό. Κέρδισε συνολικά 16 βαθμούς άρα σχηματίζουμε την εξίσωση :

$2\bullet x - (20-x) = 16$

$2\bullet x - 20 + x = 16$

$3\bullet x = 36$

$x = 36:3$

$x = 12$ οι σωστές απαντήσεις. Επομένως, οι λανθασμένες θα είναι $20-12 = 8$.

Β' τρόπος

Παρατηρώ ότι αν είχε όσες σωστές και τόσες λάθος απαντήσεις τότε θα είχε 20 - 10 = 10 βαθμούς. Επειδή έχει παραπάνω βαθμούς, έχει και παραπάνω σωστές απαντήσεις. Επίσης, παρατηρώ ότι για κάθε επιπλέον σωστή απάντηση έχει μια λιγότερη λάθος απάντηση. Άρα για κάθε επιπλέον σωστή απάντηση έχεις 3 βαθμούς επιπλέον. Αφού 16-10 = 6. Έχει δύο επιπλέον σωστές απαντήσεις. Σύνολο: 12 σωστές απαντήσεις. Επομένως, οι λανθασμένες θα είναι 20-12 = 8.

Πρόβλημα 4ο

Τετράγωνο και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχουν πλευρές φυσικούς αριθμούς και ίσα εμβαδά. Να βρείτε όλες τις δυνατές περιμέτρους των 2 σχημάτων αν γνωρίζουμε ότι οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι μικρότερες από 10 εκατοστά. *(4 μονάδες)*

Λύση

Έστω x το μήκος της πλευράς του τετραγώνου και α, β οι διαστάσεις του ορθογωνίου με $\alpha,\beta \leq 10$. Δεχόμαστε ότι α διάφορο του β.

Σε κάθε περίπτωση θα ισχύει $x^2=\alpha*\beta$. Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το μήκος της πλευράς του τετραγώνου και σχηματίζουμε τα πιθανά γινόμενα α*β και ελέγχουμε ποια ζευγάρια είναι αποδεκτά.

- Αν $x=1$ τότε έχουμε $1^2=1\bullet 1$, άρα δεν σχηματίζεται ορθογώνιο με $\alpha\neq\beta$.

- Αν x= 2 τότε έχουμε $2^2 = 2•2 = 4•1$, επομένως είναι δεκτή η λύση x=2, α=4 και β =1. Η περίμετρος του τετραγώνου θα είναι 8 και του ορθογωνίου 10.
- Αν x = 3 τότε έχουμε $3^2 = 3•3 = 9•1$, άρα είναι δεκτή η λύση x=3, α=9, β=1. Η περίμετρος του τετραγώνου θα είναι 12 και του ορθογωνίου 20.
- Αν x=4 τότε έχουμε $4^2 = 4•4 = 8•2 = 16*1$. Άρα είναι δεκτή η λύση x=4, α=8, β=2. Η περίμετρος του τετραγώνου θα είναι 16 και του ορθογωνίου 20.
- Αν x= 5 τότε έχουμε $5^2 = 5•5 =25•1$. Και οι δύο περιπτώσεις απορρίπτονται.
- Αν το x= 6 τότε έχουμε $6^2 = 6•6 = 9•4 = 12•3 = 36•1$, άρα είναι δεκτή η λύση x=6, α=9, β =4. Οι περίμετρος του τετραγώνου θα είναι 24 και του ορθογωνίου 26.
- Αν x=7, έχουμε $7^2= 7•7=49•1$. Και οι δύο περιπτώσεις απορρίπτονται.

Κάθε άλλη πιθανή λύση για x>7, απορρίπτεται διότι είτε δεν σχηματίζεται ορθογώνιο με α≠β, είτε η πλευρά του ορθογωνίου είναι μεγαλύτερη από 10 εκατοστά.

Πρόβλημα 5º

Να υπολογίσετε το άθροισμα: $2 + 4 + 6 + ... + 48 + 50 + 52 + 53 + 56 + 59 + ... + 98 + 101 + 104$

(4 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα μπορεί να σπάσει σε 2 επιμέρους αθροίσματα :

1ο άθροισμα : 2+4+6+...+48+50+52, το οποίο υπολογίζεται ως εξής :

(2+52)+(4+50)+...+(26+28) = 54•13 = 702

2ο άθροισμα : 53+56+59+... 98+101+104, το οποίο υπολογίζεται ως εξής :

(53+104)+(56+101)+(59+98)+...+(77+80) = 157•9 = 1.413

Σύνολο και των 2 αθροισμάτων : 1.413 + 702 = 2.115