



Σάββατο 10 Νοεμβρίου 2018

2^{ος} ΤΟΠΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“ΚΩΣΤΑΣ ΖΕΡΒΟΣ”

A ' Γυμνασίου

Πρόβλημα 1^ο

α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$A = \frac{1}{9} : \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} \quad (2 \text{ μονάδες})$$

$$B = (x^3 + y^3) : (x^2 - xy + y^2) \quad \text{όταν } x = 3 \text{ και } y = 2. \quad (2 \text{ μονάδες})$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{9} : \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{9} : \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{9} : \frac{1}{1 + \frac{4}{5}} \\ &= \frac{1}{9} : \frac{1}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{1}{9} : \frac{1}{\frac{9}{5}} = \frac{1}{9} : \frac{5}{9} = \frac{1}{9} : \frac{5}{9} \\ &= \frac{1}{9} : \frac{5}{9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$B = (3^3 + 2^3) : (3^2 - 3 \cdot 2 + 2^2) = (27 + 8) : (9 - 6 + 4) = 35 : 7 = 5.$$

β) Να εξετάσετε αν οι τιμές των παραστάσεων A και B είναι αντίστροφοι αριθμοί. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (1 μονάδα)

ΛΥΣΗ

Επειδή $AB = \frac{1}{5}5 = \frac{5}{5} = 1$ οι αριθμοί A,B είναι αντίστροφοι.

Πρόβλημα 2^ο

Μια μαθήτρια της Α' Γυμνασίου έγραψε δύο τεστ στα μαθηματικά. Στο ένα έγραψε 16 και στο άλλο 18.

α) Πόσο πρέπει να γράψει στο επόμενο τεστ, ώστε και στα τρία τεστ να έχει γράψει κατά μέσο όρο 18; (2 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Αν υποθέσουμε ότι στο τρίτο τεστ έχει γράψει x τότε $\frac{16+18+x}{3} = 18$ ή ισοδύναμα $\frac{34+x}{3} = 18$ ή ισοδύναμα $34+x=54$ ή ισοδύναμα $x=54-34$ ή ισοδύναμα $x=20$.

Άρα, πρέπει να γράψει 20 στο τρίτο τεστ ώστε να έχει μέσο όρο 18 στα τρία διαγωνίσματα.

β) Μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19; (3 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Επειδή πρέπει να γράψει τον ανώτατο βαθμό για να βγάλει μέσο όρο 18, δεν έχει τη δυνατότητα να έχει μέσο όρο 19.

Πρόβλημα 3^ο

Σε μια εκδρομή πήγαν συνολικά 126 άτομα (αγόρια, κορίτσια και γονείς). Αν τα αγόρια είναι διπλάσια από τα κορίτσια και οι γονείς οι μισοί από τα κορίτσια, πόσα αγόρια πήγαν στην εκδρομή; (2,5 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Αν υποθέσουμε ότι στην εκδρομή πήγαν x κορίτσια τότε θα αγόρια θα είναι $2x$ και οι γονείς $\frac{x}{2}$. Αφού όλοι μαζί ήταν 126 έχουμε διαδοχικά:

$$x + 2x + \frac{x}{2} = 126$$

$$2x + 4x + x = 252$$

$$7x = 252$$

$$x = 252:7$$

$$x = 36$$

Άρα στην εκδρομή πήγαν 36 κορίτσια και 72 αγόρια.

Πρόβλημα 4^ο

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο έχουν πλευρές φυσικούς αριθμούς και ίσες περιμέτρους. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του εμβαδού του τετραγώνου αν αυτό είναι μικρότερο από 100 τετραγωνικές μονάδες.

(2,5 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Αφού το τετράγωνο έχει εμβαδόν μικρότερο από 100 τετραγωνικές μονάδες τότε θα έχει πλευρά μικρότερη από 10.

Η περίμετρος του ισοπλεύρου τριγώνου είναι πολλαπλάσιο του 3 ενώ του τετραγώνου είναι πολλαπλάσιο του 4. Για να έχουν τα δυο σχήματα ίσες περιμέτρους, τότε η περίμετρος του κάθε σχήματος θα είναι πολλαπλάσιο του 12 με μέγιστο το $4 \cdot 9 = 36$. Άρα οι πιθανές τιμές της περιμέτρου είναι 12, 24, 36.

Αν η περίμετρος του τετραγώνου είναι 12 τότε έχει πλευρά 3 και εμβαδόν 9 τ.μ.

Αν η περίμετρος του τετραγώνου είναι 24 τότε έχει πλευρά 6 και εμβαδόν 36 τ.μ.

Αν η περίμετρος του τετραγώνου είναι 36 τότε έχει πλευρά 9 και εμβαδόν 81 τ.μ.

Πρόβλημα 5^ο

α) Ο καθηγητής φυσικής αγωγής αποφάσισε να παρατάξει τους μαθητές του σχολείου σε τριάδες, σε τετράδες και σε πεντάδες αλλά πάντα περισσεύει ένας μαθητής. Δοκίμασε να τους παρατάξει σε επτάδες αλλά περισσεύσαν 6. Πόσους μαθητές έχει το σχολείο; (2,5 μονάδες)

β) Να εκτιμήσετε ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος: το τελευταίο ψηφίο του 7^{86} ή ο μεγαλύτερος πρώτος που διαιρεί το 4410; (2,5 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Αφού παρατάσσει τους μαθητές σε τριάδες, σε τετράδες και σε πεντάδες και περισσεύει ένας το ίδιο θα ισχύει και στα κοινά πολλαπλάσιά τους.

$$\text{ΚΠ}(3,4,5) = 60, 120, 180, 240, 300, \dots$$

Άρα το πιθανό πλήθος των μαθητών είναι 61, 121, 181, 241, 301, ...

Εφόσον, όταν τους παρατάσσει σε επτάδες περισσεύουν 6, θα βρούμε ποια από τις παραπάνω τιμές δίνει υπόλοιπο 6 όταν διαιρεθεί με το 7. Από τον τύπο της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$$\begin{aligned} 61 &= 7 \cdot 8 + 5 \\ 121 &= 7 \cdot 17 + 2 \\ 181 &= 7 \cdot 25 + \boxed{6} \\ 241 &= 7 \cdot 34 + 3 \\ 301 &= 7 \cdot 43 + 0 \end{aligned}$$

Άρα το σχολείο έχει 181 μαθητές.

β)

Το τελευταίο ψηφίο του 7^n θα είναι

$$\begin{cases} 7, & \text{αν } n=4k-3 \\ 9, & \text{αν } n=4k-2 \\ 3, & \text{αν } n=4k-1 \\ 1, & \text{αν } n=4k \end{cases}, k \geq 1 \text{ αμεταβλητός}$$

Επειδή ο αριθμός $n=86$ διαιρείται με το 2 αποκλείουμε τις περιπτώσεις να είναι 3 ή 7 το τελευταίο ψηφίο και επειδή δε διαιρείται το 86 με το 4 αποκλείουμε και την περίπτωση να είναι 1. Άρα το τελευταίο ψηφίο του 7^{86} είναι το 9.

Αναλύουμε το 4410 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

4410		2
2205		3
735		3
245		5
49		7
7		7
1		

Επειδή $4410 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$, ο μεγαλύτερος
πρώτος που διαιρεί τον αριθμό 4410 είναι το 7.

Επειδή $4410 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ ο μεγαλύτερος πρώτος που διαιρεί τον αριθμό 4410 είναι το 7. επειδή $9 > 7$, μεγαλύτερος αριθμός είναι το τελευταίο ψηφίο του 7^{86} .

Διάρκεια: 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!