Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σχολή Θετικών Επιστημών
Μαθηματικό Τμήμα
Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών

ΜΑΘΑΙΝΩ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ FUNCTION PROBE: ένα παιγνίδι πολλαπλών αναπαραστάσεων στα πλαίσια της συνεργατικής μάθησης.

Διπλωματική Εργασία στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

ΒΟΥΛΓΑΡΗ ΝΥΜΦΟΔΩΡΑ
ΑΜ: 212402

Επιβλέπων καθηγητής: Χ.ΚΥΝΗΓΟΣ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2005

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

στ……

……..

που απονέμει το

Τμήμα Μαθηματικών

του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε την……..από Εξεταστική Επιτροπή

αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
……..(επιβλέπων καθηγητής)	……..	……
…….	…….	…….
…….	…….	……

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εποχή μας ολοένα και περισσότερο μας προτρέπει να μαθαίνουμε και ολοένα και περισσότερο μας παρακινεί να χρησιμοποιούμε την τεχνολογία στην εκπαιδευτική διαδικασία. Τα μηχανήματα της σύγχρονης τεχνολογίας, όπως ο Η/Υ, και τα αντίστοιχα με αυτήν εκπαιδευτικά λογισμικά προγράμματα είναι δυναμικά στοιχεία που μπορούν, αν χρησιμοποιηθούν από κατάλληλα επιμορφωμένους εκπαιδευτικούς, να συμβάλλουν θετικά στη διαδικασία της μάθησης.

Ειδικότερα η χρήση της ηλεκτρονικής τεχνολογίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών δημιουργεί περιβάλλον μάθησης που ενισχύει την εποπτεία, συμβάλλει στη διαμόρφωση της κριτικής σκέψης των μαθητών και στην ανάπτυξη της δημιουργικότητάς τους, διεγείρει το ενδιαφέρον τους, προωθεί την ενεργητική συμμετοχή τους και τους διευκολύνει στην κατανόηση των μαθηματικών ιδεών και προβλημάτων.

Οι αντιρρήσεις που εκφράζονται ή και οι φόβοι που υπάρχουν ότι δηλαδή τα παιδιά δε θα μαθαίνουν έτσι μαθηματικά, αλλά απλώς θα πατάνε ‘κουμπιά’ ή ότι δε θα μπορούν να σκεφτούν πώς θα λύσουν ένα πρόβλημα της ζωής τους, είναι κατανοητοί και εντάσσονται στους γενικότερους σκεπτικισμούς για τη χρησιμοποίηση των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση.

Πράγματι, υπάρχει μια λεπτή γραμμή ισορροπίας για να μη φτάσουμε στα άκρα με τη χρήση της νέας τεχνολογίας στην εκπαίδευση. Εδώ είναι η δική μας μεγάλη ευθύνη ώστε να μη δημιουργήσουμε γενιές «ανεγκέφαλων» μαθητών που θα ξέρουν απλά τη χρήση αλλά όχι το «γιατί», ή να μην παράγουμε μια ‘ελίτ μορφωμένων τεχνοκρατών’ και μιας μάζας άβουλων εκτελεστών. Για τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές είναι εντελώς διαφορετικό ζήτημα το **να μάθουν ένα πρόγραμμα** από το **να μάθουν με το πρόγραμμα.** Το μεγάλο ζητούμενο για τους εκπαιδευτικούς είναι το πώς θα διδάξουν με τα μηχανήματα και τα προγράμματα της σύγχρονης τεχνολογίας, πώς θα βοηθήσουν τους μαθητές ώστε να αναπτύσσουν τις ικανότητές τους, να ανακαλύπτουν και να εξηγούν τα φαινόμενα, να επιλέγουν κριτικά και να χρησιμοποιούν τις παρεχόμενες πληροφορίες, Άλλωστε ο υπολογιστής και γενικότερα η ηλεκτρονική τεχνολογία ως μέσο διδασκαλίας δεν αντικαθιστά τον άνθρωπο-δάσκαλο αλλά πρέπει να τον διευκολύνει στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Η πρόοδος της τεχνολογίας των υπολογιστών και η παραγωγή εκπαιδευτικών λογισμικών προγραμμάτων για τη διδασκαλία των μαθημάτων έχει προκαλέσει κινητοποίηση των αρμοδίων φορέων τα τελευταία χρόνια. Έτσι σε ορισμένα σχολεία έχουν υλοποιηθεί πιλοτικά προγράμματα διδασκαλίας με τη χρήση των νέων τεχνολογιών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ-ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ……... σελ. 7

ΜΕΡΟΣ 1^{Ο}

ΓΝΩΣΙΟΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

1. *Η έννοια της συνάρτησης και η σημασία της στη μάθηση των μαθηματικών*……. σελ. 10

1.1 Ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης…….. σελ. 10

1.2 Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης στην τάξη των μαθηματικών – το ζήτημα της διδακτικής της μεταφοράς……...…… σελ. 12

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

2. Η αναγκαιότητα της θεωρίας κατασκευής της γνώσης ως μοντέλο μάθησης …..... σελ.16

2.1 Το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο και οι συνέπειές του. Η μαθηματική γνώση ως προϊόν μετάδοσης……..……... σελ.16

2.2 Προτάσεις για πιο «ενεργητικές» διδασκαλίες. Η μαθηματική γνώση ως προϊόν κατασκευής…….……. σελ.19

2.2.1 Κονστρουκτιβισμός, Λύση Προβλήματος και Διδασκαλία…….....…… σελ.21

2.2.2 Λάθη και εμπόδια…….....……. σελ.22

1. Ο ρόλος του λάθους στη διαδικασία της μάθησης…… σελ.22

2. Η έννοια του εμποδίου…….. σελ.23

2.2.3 Ο ρόλος του δασκάλου…….……. σελ.25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

3. *Συνεργατική μάθηση*…….……. σελ.27

3.1 Τα συστατικά στοιχεία της συνεργατικής μάθησης…….. σελ.27

3.2 Η χρησιμότητα της συνεργατικής μάθησης στη διαδικασία της μάθησης...… σελ.29

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

4 *Μάθηση και διδασκαλία με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή*……. σελ.32

4.1 Μαθηματικά και διδασκαλία……...…….. σελ.32

4.2 Ο Υπολογιστής στη διδασκαλία……...……. σελ.33

4.3 Περιβάλλοντα μάθησης μέσω Η / Υ……...…….. σελ.34
4.4 Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές και Συνεργατική Μάθηση……..... σελ.36
4.5 Χρήση εργαλείου πολλαπλών αναπαραστάσεων : Function Probe……..…..... σελ.38
4.6 Πλαίσιο σεναρίων για την παιδαγωγική αξιοποίηση των Νέων Τεχνολογιών…….……..... σελ.43

ΜΕΡΟΣ 2^{ο}

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}

5. *Σχεδιασμός της έρευνας* σελ.49
5.1 Αντικείμενο της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα……..……... σελ.49
5.2 Μεθοδολογία Έρευνας……..….. σελ.49
5.2.1 Τεχνολογικά εργαλεία που προτείνονται…….. σελ.50
5.2.2 Χρήση συμπληρωματικού υλικού……. σελ.50
5.2.3 Διδακτική μέθοδος…….……... σελ.50
5.2.4 Συλλογή δεδομένων…….. σελ.51
5.2.5 Τρόποι ανάλυσης δεδομένων…….……... σελ.51
5.3 Παιδαγωγικοί, κοινωνιολογικοί και πολιτισμικοί στόχοι…….. σελ.51
5.3.1 Ο ρόλος του σεναρίου και των τεχνολογικών εργαλείων για την αναβάθμιση των συμμετεχόντων ή την ενίσχυση των ρόλων τους …… σελ.51
5.3.2 Ο ρόλος των προς χρήση εργαλείων (τεχνολογικών και άλλων) στο συγκεκριμένο σενάριο……..……... σελ.52
5.3.3 Αναφορά στα καινοτομικά στοιχεία του σεναρίου και των εργαλείων στη σχολική κοινότητα και στον αναμενόμενο ρόλο τους για τους συμμετέχοντες…….…… σελ.52
5.4 Διδακτική διαδικασία……..…… σελ.54
5.4.1 1^{η} φάση: Εισαγωγή στη χρήση του λογισμικού……..…… σελ.54
5.4.2 2^{η} φάση: Εισαγωγή στο νόμο της εκθετικής μεταβολής……..……... σελ.57
5.4.3 3^{η} φάση: Εφαρμογή του νόμου της εκθετικής μεταβολής - επίλυση προβλήματος……... σελ.61

ΜΕΡΟΣ 3^{ο}

Η ΕΡΕΥΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}

6. *Περιγραφή διδακτικής διαδικασίας – Γνωστικοί στόχοι*……. σελ.65

6.1 Περιγραφή και ανάλυση της εργασίας των μαθητών κατά την 1ηφάση…… σελ.65
6.2 Περιγραφή και ανάλυση της εργασίας των μαθητών κατά την 2η φάση …….. σελ.66
6.3 Περιγραφή και ανάλυση της εργασίας των μαθητών κατά την 3η φάση …….. σελ.73

ΜΕΡΟΣ 4ο

ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

7. *Γενικά συμπεράσματα- Συζήτηση*…….…… σελ.90
7.1 Η συνεργασία των μαθητών……. σελ.90
7.2 Ο ρόλος του λογισμικού στην εκπαιδευτική διαδικασία…….. σελ.91
7.3 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη μαθησιακή διαδικασία…….. σελ.93
7.4 Γενικά συμπεράσματα…….. σελ.94
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ …….. σελ.96

Περίληψη

Η εργασία αυτή αφορά στην περιγραφή της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας κατά την εφαρμογή μιας μαθηματικής διδακτικής δραστηριότητας σε μαθητές της Β Λυκείου.

Στόχος της εκπαιδευτικής δραστηριότητας είναι η εισαγωγή εννοιών σχετικών με την εκθετική συνάρτηση και η χρήση τους στη λύση προβλήματος.

Ως γνωσιοθεωρητικό πλαίσιο χρησιμοποιήθηκε η θεωρία κατασκευής της γνώσης (κονστρουκτιβισμός) σε συνδυασμό με τη μάθηση στα πλαίσια της ομάδας (συνεργατική μάθηση) και ως μαθησιακό περιβάλλον οι νέες τεχνολογίες και πιο συγκεκριμένα ο ηλεκτρονικός υπολογιστής.

Για την υλοποίηση της δραστηριότητας αυτής χρησιμοποιήθηκε εκπαιδευτικό λογισμικό πολλαπλών αναπαραστάσεων για τη διερεύνηση συναρτήσεων (Function Probe).

Στην εργασία αυτή αναλύεται αρχικά το θεωρητικό πλαίσιο του σχεδιασμού και της εφαρμογής της εκπαιδευτικής δραστηριότητας, στη συνέχεια περιγράφεται και μελετάται η πορεία διεξαγωγής της δραστηριότητας σε πραγματικές σχολικές συνθήκες και συζητούνται οι παράγοντες που την επηρεάζουν.

Δομή της εργασίας

Στο πρώτο μέρος της εργασίας, στο πρώτο κεφάλαιο καταγράφεται μια επιστημολογική ανάλυση της έννοιας της συνάρτησης, σύντομη μελέτη της ιστορικής της εξέλιξης. Παρουσιάζονται παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόησή της στην τάξη των μαθηματικών καθώς και σχολιάζεται η διδακτική της μεταφορά.

Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι κυριότερες θεωρίες μάθησης στις οποίες στηρίζεται η έρευνα. Συγκεκριμένα, υποστηρίζεται η αναγκαιότητα της θεωρίας κατασκευής της γνώσης (Κονστρουκτιβισμός) ως μοντέλο μάθησης και γίνεται αναφορά στα συστατικά στοιχεία της συνεργατικής μάθησης και στη χρησιμότητά της στη διαδικασία της μάθησης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάται η συμβολή του ηλεκτρονικού υπολογιστή στη διαδικασία της μάθησης. Ασχολούμαστε με την εισαγωγή του υπολογιστή ως εργαλείο ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης, στη συνέχεια εστιάζουμε την προσοχή μας ειδικά στον τομέα των συναρτήσεων, όπου κατάλληλα περιβάλλοντα μάθησης βασισμένα στον Η/Υ, εφοδιάζουν τους μαθητές με ικανότητες να κάνουν συνδυασμούς ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και τους οδηγούν σε βαθύτερη κατανόηση της έννοιας. Γίνεται ιδιαίτερη αναφορά σε εκπαιδευτικό λογισμικό για τη διερεύνηση των συναρτήσεων (Function Probe) καθώς

και στο πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται τα σενάρια των δραστηριοτήτων που περιγράφονται και αναλύονται στο δεύτερο μέρος της εργασίας.

Στο δεύτερο και τρίτο μέρος που αποτελείται από το πέμπτο και έκτο κεφάλαιο της εργασίας αντίστοιχα παραθέτονται ο σχεδιασμός της έρευνας και η έρευνα που έγινε με μαθητές της Β Λυκείου με τη βοήθεια του λογισμικού Function Probe για τη διδασκαλία και την εφαρμογή του νόμου της εκθετικής μεταβολής. Η έρευνα περιγράφεται σε τρεις φάσεις σε κάθε μια από τις οποίες αναφέρεται η περιγραφή της εργασίας των μαθητών και ανάλυση της εργασίας τους στην εκάστοτε φάση.

Το τέταρτο μέρος της εργασίας αποτελείται από το έβδομο κεφάλαιο στο οποίο συζητούνται τα αποτελέσματα της έρευνας αναλυτικά για το ρόλο του λογισμικού στη διδακτική διαδικασία, το ρόλο του δασκάλου και της συνεργασίας των μαθητών και εξάγονται συμπεράσματα.

ΜΕΡΟΣ 1^{ο}

ΓΝΩΣΙΟΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

1. Η έννοια της συνάρτησης και η σημασία της στη μάθηση των μαθηματικών.

1.1 Ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι κεντρική στην Επιστήμη των Μαθηματικών και τις εφαρμογές της και ανάγεται στη γενικότερη τάση του ανθρώπου να κάνει συσχετισμούς μεταξύ ποσοτήτων, η οποία θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι τόσο αρχαία όσο και τα ίδια τα Μαθηματικά. Η αντίληψη μιας πολύ γενικής αντιστοιχίας σε τιμές (π.χ ημερομηνίας) και άλλων τιμών (γωνιακών θέσεων πλανητών) φαίνεται ότι υπάρχει στον Πτολεμαίο 165 μ.Χ. ή στους Βαβυλώνιους ακόμη παλιότερα (Katz, 1993).

Κατά την περίοδο των αρχαίων Ελλήνων, κάνει την εμφάνισή της μια ιδιαίτερη διαχείριση των μαθηματικών αντικειμένων η οποία θα υπερβεί κατά πολύ εκείνη των απλών υπολογισμών και θα δώσει ουσιαστικά προοπτική στην απόδειξη και την ακρίβεια που θα κάνουν τα Μαθηματικά. Η ιδέα του λόγου, που έγινε βασικό διανοητικό εργαλείο της διαλεκτικής και της Γεωμετρίας είναι γνωστό ότι δεν παρέπεμπε άμεσα στη μέτρηση (Szabo, 1973; Mueler, 1981) αλλά αποτέλεσε ένα εργαλείο προς σύγκριση απαραίτητο στις αποδείξεις. Οπωσδήποτε, η σχέση διαμέτρου και περιφέρειας ή εμβαδού κύκλου αποτελούν πρώιμες μορφές συναρτησιακού συσχετισμού (functionality), αλλά ένας τέτοιος συνθετικός ορισμός δεν στάθηκε σε εκείνη την εποχή αναγκαίος (Boyer, 1949).

Κατά την Αναγέννηση ξεπερνιούνται τα επιστημολογικά εμπόδια των αρχαίων και καθίσταται ο χρόνος ως ομογενές μέγεθος στις μετρήσεις και μπαίνουν οι βάσεις της μαθηματικής κινητικής (Koyre, 1994). Η μαθηματική μελέτη της κίνησης αποτελεί καθαυτό επίτευγμα της Αναγέννησης και είναι εκείνη που θα οδηγήσει στις δυναμικές ιδέες του Απειροστικού Λογισμού, όπως της παραγώγου και του διαφορικού, οπότε και αναπόφευκτα θα προκύψει η ανάγκη νέων μαθηματικών εργαλείων (Boyer, 1995).

Διάφορες επεξεργασίες που θα διαρκέσουν τρεις και πλέον αιώνες μετά την Αναγέννηση και προσιδιάζουν στην ιδέα της συνάρτησης, θα κάνουν την εμφάνισή τους. Από τον ορισμό του Bernoulli το 1718 *‘ ως η ποσότητα που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από μια μεταβλητή και σταθερών’* περνάμε στον ορισμό του Euler το 1747 *‘**Συνάρτηση** μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συνθέτει με οποιονδήποτε τρόπο μια μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες’* (Katz, 1993). Θ πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ την ιδέα της μεταβλητής που είναι εμφανής. Την εποχή εκείνη, η μεταβλητή ή η σταθερά δεν είναι παρά έκτατα συνήθως γεωμετρικά μεγέθη κατά τη μελέτη καμπυλών (τετμημένες, τεταγμένες κ.λ.π.) (Euler, 1747). Όμως αυτή η αντίληψη, η αναφορά των γραμμάτων σε αντικείμενα που θεωρούνταν πραγματικά, όπως παρατηρεί ο Βασάκος (1995) δεν πρέπει να άρεσε στον Euler και προσπάθησε το 1775 να διατυπώσει ένα ορισμό πιο αφηρημένο *‘Μια ποσότητα θα ονομαζόταν συνάρτηση μόνο όταν θα εξαρτιόταν από μια άλλη ποσότητα με έναν τέτοιο τρόπο ώστε, εάν η τελευταία ποσότητα αλλάζει η*

πρώτη ποσότητα να υφίσταται αλλαγή από μόνη της' (Katz, 1993).Στον Euler αποδίδεται και η χρήση του συμβόλου ‘ f ’ από το function. Δεν πρέπει να μας διαφύγει ότι υπάρχει μια σύνδεση με αυτό που λέμε ‘λειτουργία’ ή ‘διαδικασία’ και την οποία προσπαθούμε να αποδώσουμε με την ιδέα της συνάρτησης (Cassirer, 1953).

Ο 19^{ος} αιώνας είναι η εποχή που κυριαρχεί το αίτημα της θεμελίωσης για τα Μαθηματικά (Ρουσόπουλος, 1985). Σε αυτό θα συμβάλλουν μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής, όπως οι Langrange, Legendre, Cauchy, Bolzano, Dedekind, Cantor, Weierstrass, Peano, Frege κ.α. Ο Cauchy, που έδωσε το μαθηματικό ορισμό του ορίου ακολουθίας, προσπαθεί να ξεπεράσει και τις διαισθητικές δεσμεύσεις της έννοιας της συνάρτησης με μικρή όμως επιτυχία : *« Όταν μεταβλητές ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους κατά τέτοιο τρόπο ώστε όταν δίνεται η τιμή της μιας από αυτές, να μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των άλλων, τότε συνήθως εννοούμε ότι αυτές οι μεταβλητές ποσότητες μπορούν να εκφραστούν μέσω της μιας από αυτές και η οποία τότε παίρνει την ονομασία 'ανεξάρτητη μεταβλητή'. Οι απομένουσες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι εκείνες που μπορούμε να ονομάσουμε 'συναρτήσεις' αυτής της μεταβλητής».* Πρέπει να σημειωθεί ότι ο Cauchy έχει ακόμη υπόψη του τις αναλυτικές συναρτήσεις που είναι συνεχείς και διαφορίσιμες.

Οι αντιλήψεις του Cauchy (1821) για τις μεταβλητές ποσότητες και η απόδειξη του Fourier σύμφωνα με την οποία κάθε καμπύλη μπορεί να αναπαρασταθεί από μια τριγωνομετρική σειρά μετασχηματίζονται στον ορισμό της συνάρτησης μέσω της θεωρίας συνόλων με την αυθαίρετη αντιστοιχία (Dirichlet, 1837). Πρόκειται για αντιστοιχία που δε βασίζεται απαραίτητα σε κάποια αλγοριθμική εξάρτηση μεταξύ των x και y. Η γενική έννοια μιας συνάρτησης y μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x ως αυθαίρετη αντιστοιχία θα επιφέρει σημαντικούς μετασχηματισμούς στην ανάπτυξη της ανάλυσης (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995).

Κατά συνέπεια, μπορούμε να πούμε εν συντομία τα εξής: Η συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια αποτελεί μια νοητική κατασκευή που ολοκληρώθηκε σχετικώς πρόσφατα μέσα στην επιστήμη. Πρόκειται για μια σύνοψη και ενοποίηση πολλών εν πρώτοις διαφορετικών εμπειριών και νοητικών εργαλείων που μαθηματικοί και επιστήμονες εν γένει χρησιμοποίησαν για να λύσουν προβλήματα και να συγκροτήσουν θεωρίες. Η λιτότητα του σημερινού συνολοθεωρητικού ορισμού, όπως τον ξέρουμε, δεν αποτελεί για τους μαθητές απλά ένα ξυράφι του Ochkam αλλά την έρημη ψυχρή κορυφή ενός παγόβουνου που κρύβει βαθιά την ιστορική πρακτική και εμπειρία που τη διαμόρφωσε.

1.2 Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης στην τάξη των μαθηματικών – το πρόβλημα της διδακτικής της μεταφοράς.

Εξαιτίας της ιστορικής συμπύκνωσης, που περιγράψαμε παραπάνω (Boyer, 1995; Katz, 1993; Βασάκος, 1995), η έννοια της συνάρτησης είναι τόσο αφηρημένη ώστε παρουσιάζει πολλές δυσκολίες για τη διδακτική της μεταφορά (παρόλη την απλότητα και τη σαφήνεια του ορισμού της για τα κριτήρια ενός μαθηματικού). Στα διδακτικά εγχειρίδια παραθέτονται κατά συγκεχυμένο τρόπο οι διάφορες επιστημολογικές προσεγγίσεις που οδήγησαν στο νόημα της συνάρτησης, μέσα στη μακρόχρονη ιστορική της εξέλιξη. Η πολυπλοκότητα, αυτής της διδακτικής μεταφοράς, έχει απασχολήσει ιδιαίτερα τους ενασχολούμενους με τη διδακτική των σχολικών (και όχι μόνο) μαθηματικών.

«Είναι γενικά παραδεκτό ανάμεσα στους μαθηματικούς παιδαγωγούς, ότι η συνάρτηση είναι ένα από τα σημαντικότερα θέματα, το οποίο καλούνται να αντιμετωπίσουν τα παιδία κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσής τους» (Kalchman & Case, 1998). Ο σημαντικός ρόλος που κατέχει η έννοια της συνάρτησης, η οποία αποτελεί μια έννοια με μακρόχρονη ιστορική εξέλιξη, στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών διαφαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνητικών εργασιών που εμφανίζονται στη διεθνή βιβλιογραφία και επιχειρούν μια πολυδιάστατη μελέτη της έννοιας αυτής.

Οι εργασίες θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε δύο τομείς ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται:

- Ο ορισμός της συνάρτησης και η διδακτική προσέγγιση της έννοιας, αφορά σε έρευνες που ασχολούνται με τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης (Breidenbach et al., 1992; Dubinsky & Harel, 1992; Markovitz et al., 1986; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989; Freudenthal, 1983; Kalchman & Case, 1998) και σε έρευνες που ασχολούνται με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών (Even, 1990; Even, 1993; Norman, 1992).

- Η συνάρτηση και οι διάφοροι τρόποι αναπαράστασής της (Artique, 1992; Duval, 1987; Even, 1998; Gagatsis, 1997; Hitt, 1998; Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992;).

Σχετικά με τον πρώτο τομέα εργασιών, οι ερευνητές συνήθως αναζητούν τα επιστημολογικά εμπόδια, όπως αυτά μπορούν να προβλεφθούν από την ιστορική μελέτη της έννοιας και επιπλέον προτείνουν μεθόδους διδασκαλίας που έχουν ως στόχο να ξεπεραστούν τα εμπόδια αυτά (Sierpinska, 1992). Μια άλλη αντιμετώπιση είναι εκείνη του Freudenthal (1983) που ασχολείται κυρίως με τις βιωματικές εμφανίσεις της έννοιας μέσω γλωσσικών μεταφορών, πρακτικών, φυσικών εμπειριών και εφαρμογών.

Είναι προφανές ότι σε τέτοιους σχεδιασμούς για μια ενδεχόμενη διδακτική μεταφορά δεν πρέπει να αγνοηθεί το ότι μέσα στο πλαίσιο της γνωστικής ψυχολογίας και ιδιαίτερα από τον ίδιο τον Piaget, έχουν γίνει προσπάθειες για την αναγωγή σε

σωματικές κιναισθητικές εμπειρίες που προκύπτουν δια μέσου των δράσεων των υποκειμένων και θα μπορούσαν να αποτελέσουν το βιωματικό υπόστρωμα, ώστε να γίνει κατανοητή μια τέτοια έννοια.

Στην περίπτωση της συνάρτησης, ο Piaget είχε διαθέσει μια εκτεταμένη έρευνα στο τέλος της καριέρας του (Piaget et al., 1968; Davidson, 1988; Chapman & Lindenberger, 1988; Kalchman & Case, 1998). Ο Piaget θεωρούσε ότι οι αρχικές καταβολές της έννοιας προηγούνται της λειτουργικής περιόδου των 7 ετών. Στις έρευνές του αναζητά τα πρωταρχικά βιώματα που αντιστοιχούν σε συσχετισμούς του τύπου ένα-ένα ή πολλά-ένα. Π.χ «*όσο δυνατότερα σπρώξω την μπάλα τόσο μακρύτερα θα πάει*» (Davidson, 1988). Επίσης, εμπειρίες που έχουν τη μορφή πολλά-ένα, καθόσον ένα επιδιωκόμενο αποτέλεσμα, π.χ η προσέγγιση ενός αντικειμένου, μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς τρόπους άσκησης μιας δράσης (Davidson, 1992).

Είναι γενικά παραδεκτό ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο γίνεται σε μεγάλο βαθμό ξεκομμένη από τις εμπειρίες των παιδιών με αποτέλεσμα οι έννοιες να μη βρίσκουν κάποιο προηγούμενο εννοιολογικό υπόστρωμα για να στηριχθούν. Συχνά, οι καλούμενες εφαρμογές από τη φυσική, την οικονομία ή άλλες επιστήμες προϋποθέτουν μια άλλη επιστημονική γνώση που εκείνη με τη σειρά της προϋποθέτει τα μαθηματικά για να γίνει κατανοητή. Εκτός των άλλων, πραγματιστικές αναφορές είναι και εξεζητημένες, αφού όπως αναφέρει και ο Γαγάτσης καμία νοικοκυρά δε στήνει κάποια συνάρτηση για να ψωνίσει. Την ίδια στιγμή, αυτό που γίνεται πολύ λίγο είναι η αξιοποίηση των άμεσων βιωματικών εμπειριών που προέρχονται από την επαφή μας με το φυσικό περιβάλλον, την αίσθηση της βαρύτητας, την πρόσληψη της συμμετρίας, της ομοιότητας ή της σταθερότητας των μορφών (Lappas & Spyrou, 2003; Watson et al.,2002; Nunez et al., 1999; Lakoff & Nunez,2000).

Οι μαθητές ενίοτε, παγιδεύονται σε μια σειρά εμπόδια που αποτελούν γενικεύσεις των αποσπασματικών σχολικών εμπειριών ή μεταφορών γλωσσικών συνειρμών, που προσλαμβάνονται κατά κυριολεξία, όπως για παράδειγμα την αναζήτηση μιας χρονικής μεταβλητής πίσω από τους όρους της ανεξάρτητης ή της εξαρτημένης μεταβλητής. Αυτό αποτέλεσε ένα ισχυρό επιστημολογικό εμπόδιο, όπως είδαμε στις ιστορικές μας αναφορές, καθώς η μελέτη της κίνησης στάθηκε αποφασιστικός παράγοντας στην ανάδειξη της έννοιας.

Τα εκπαιδευτικά προγράμματα ακολουθούν διάφορους δρόμους αποκαλύπτοντας στα παιδιά κομμάτια ενός πάζλ που συγκροτούν ένα αόριστο συνοθήλευμα αποσπασματικών πληροφοριών, τυφλών απομνημονεύσεων, διάσπαρτων συνιστωσών που ενδεχομένως ενοποιούνται σε πανεπιστημιακό επίπεδο σπουδών που έχουν να κάνουν με τις θετικές επιστήμες. Τύποι, γραφήματα, διαγράμματα, προφορική περιγραφή σχέσεων, ένα αόριστο σχήμα συνειρμών, όπως παρατηρεί και η Sierpinska.

Η Sierpinska αναζητά τα διάφορα εμπόδια που εμφανίζουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία και τα συσχετίζει με την ιστορική ή τη διδακτική εξέλιξη της έννοιας προτείνοντας μια διδακτική πορεία που θα έχει επίγνωση αυτών των εμποδίων και θα υπογραμμίζει το ξεπέρασμά τους. Η τεχνική αυτή θυμίζει την πορεία προς τη γενίκευση μέσω αντιπαραδειγμάτων που προτείνει ο Lakatos (1996). Η πορεία αυτή θα εμφανίσει στο τέλος το μαθηματικό ορισμό της έννοιας αφού έχει διδάξει όλες τις επιμέρους δυνατές εμφανίσεις του μέσα στην εμπειρία των μαθητών.

Μερικά από τα εμπόδια που διακρίνει η Sierpinska είναι:

- Το ασυνείδητο σχήμα σκέψης που αναφέρεται στις αλλαγές του κόσμου ως φαινόμενα και χωρίς να επικεντρώνεται στο πως τα πράγματα αλλάζουν, παραγνωρίζοντας το τι αλλάζει, δηλαδή τις παραμέτρους της αλλαγής. Μια τέτοια στάση βλέπει κατά ποιοτικό τρόπο τον κόσμο και δεν στέκεται στις ποσοτικές σχέσεις.
- Η σκέψη που κατά πρωταρχικό τρόπο αναπτύσσεται στην άλγεβρα και αφορά στο χωρισμό σε σταθερές και άγνωστες ποσότητες οδηγεί συχνά στην ιδέα της εξίσωσης και όχι στη συνάρτηση.
- Η συμμετρία μεταξύ των x και y. Στην εξίσωση της έλλειψης ή του κύκλου έχουμε τις σχέσεις των x και y οι οποίες εμφανίζονται κατά ένα ισοδύναμο και συμμετρικό τρόπο. Δηλαδή, δεν έχουμε να κάνουμε με ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή και η σειρά τους είναι αδιάφορη. Ο χειρισμός συμβόλων στην άλγεβρα είναι συχνά αδιαφοροποίητος στο αν λύνω μια εξίσωση για x ή για y, ακόμη δε για σταθερές ή μεταβλητές.
- Η σύγχυση μεταξύ συνάρτησης και σχέσης.
- Η διάκριση μεταξύ της χρήσης του αριθμού και της ποσότητας. Αυτό εν γένει οφείλεται από μια περιορισμένη κατανόηση του συνόλου των πραγματικών αριθμών.
- Η εντύπωση ότι οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με έναν αναλυτικό τύπο.
- Το πρόβλημα μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης, συμβολική, γραφική, με πίνακα τιμών κλπ.
- Η χρονικότητα της μεταβλητής που αναφέραμε παραπάνω.
- Άλλα εμπόδια όπως η εύκολη εντύπωση της συνάρτησης ως 1-1 και η δυσκολία της κατανόησης του πολλά-ένα.

Με βάση τις παραπάνω διακρίσεις της Sierpinska, μια ενδεχόμενη διδασκαλία της συνάρτησης είναι εκείνη που θα ξεκινά από τις διάφορες δυνατές εμφανίσεις της έννοιας, π.χ. γραφική παράσταση, πίνακες τιμών, λεκτικές είτε συμβολικές μορφές. Θα τη διακρίνει από άλλες που συνειρμικά ενδεχομένως εμπλέκονται στο νου των μαθητών, π.χ. σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις, όπως η εξίσωση του κύκλου ή τη σύγχυση που επικρατεί συχνά σε σχέση με την έννοια της εξίσωσης, επειδή και εκείνη δίνεται με τύπο. Στερεότυπες αποδόσεις της έννοιας, π.χ. συνέχεια της συνάρτησης, μονοκλαδική. Επίσης, μια παραδοσιακή και από την ιστορία δυσκολία που πρέπει να ξεπεραστεί είναι το ξεκαθάρισμα του νοήματος της μεταβλητής. Θα πρέπει να προσθέσουμε και άλλες στερεότυπες προσκολλήσεις των μαθητών που έχουν παρατηρηθεί σε διάφορες έρευνες όπως η 1-1 συνάρτηση ως το πλέον διαδεδομένο παράδειγμα συνάρτησης.

Ο δεύτερος τομέας ερευνών περιλαμβάνει τις εργασίες που εξετάζουν τη συνάρτηση σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και τη μετάβαση από το ένα πεδίο έκφρασης στο άλλο. Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση ενός πίνακα τιμών, μιας γραφικής παράστασης, μιας αλγεβρικής έκφρασης ή μιας λεκτικής έκφρασης. Όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992) κάθε πεδίο έκφρασης, κάθε αναπαράσταση, διαφωτίζει και παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Αντίθετα, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται.

Σύμφωνα με τον Eisenberg (1992), «η ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης στους μαθητές θα έπρεπε να αποτελεί βασικό στόχο του αναλυτικού προγράμματος τόσο της δευτεροβάθμιας όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης» (Eisenberg, 1992). Ωστόσο, η ποικιλία αναπαραστάσεων που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης και οι δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία συνδυασμού των συστημάτων αναπαράστασης μιας έννοιας, η οποία εμπλέκεται στην επίλυση προβλήματος, δυσχεραίνουν την επίτευξη του παραπάνω στόχου(Hitt,1998).

Μια βασική παράμετρος των δυσκολιών που οι μαθητές αντιμετωπίζουν στην κατανόηση των εννοιών που έχουν σχέση με τις συναρτήσεις καθώς και της μετάφρασής τους από τη μια μορφή έκφρασης στην άλλη είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η διδακτική μεταφορά τους στην τάξη. Συγκεκριμένα, το πλαίσιο μελέτης της συνάρτησης παρουσιάζεται πολύ περιορισμένο και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται είναι συγκεκριμένου τύπου – συνήθως καλλιεργείται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση.

Οι ερευνητές Vinner & Dreyfus, 1983; Markovitz et al., 1983; Hercovics, 1982 διαπίστωσαν ότι οι μαθητές πιστεύουν λανθασμένα ότι:

- Οι συναρτήσεις πρέπει να δίνονται με έναν τύπο. Αν δίνονται πολλαπλοί τύποι συναρτήσεων, τότε έχουμε πολλές συναρτήσεις.
- Μια συνάρτηση υπάρχει αν υπάρχει ένας τύπος που την περιγράφει.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να έχει ¨καλή συμπεριφορά¨(συμμετρικότητα, ομαλότητα, συνεχώς να αυξάνεται…).
- Θα πρέπει να υπάρχει μια πράξη στο x που να αποδίδει το y, αυτό αποκλείει άλλου είδους σχέσεις.
- Οι σταθερές και καθορισμένα σύνολα σημείων δεν είναι συναρτήσεις.
- Ο καθορισμός του πεδίου ορισμού δεν αποτελεί μέρος του ορισμού της συνάρτησης.

(Vinner, 1983; Markovitz, Eylon και Bruckheimer, 1983; Herscovics, 1982).

Διαφαίνεται λοιπόν ότι ένας βασικός στόχος της διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης αφορά στην ικανότητα των μαθητών να μεταβαίνουν από μια αναπαράσταση σε άλλη, χωρίς να υποπίπτουν σε αντιφάσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

2. Η αναγκαιότητα της θεωρίας κατασκευής της γνώσης ως μοντέλο μάθησης.

Από την αυγή του πολιτισμού οι φιλόσοφοι, οι παιδαγωγοί και αργότερα οι ψυχολόγοι, αναρωτήθηκαν για το ποιες ήταν οι συνθήκες μέσα στις οποίες ένα παιδί μπορεί να κατακτήσει γνώσεις.

Ο Σωκράτης, στη *μαιευτική* του, θεωρεί ότι κάθε άνθρωπος είναι κάτοχος της καθολικής γνώσης. Ο ρόλος του παιδαγωγού έγκειται στο να διευκολύνει αυτή τη γνώση να αναδειχθεί, όπως ένας μαιευτήρας βοηθάει ένα βρέφος να έρθει στη ζωή, κάτω από τις καλύτερες συνθήκες.

Μια δογματική αντίληψη της γνώσης οδηγεί στη μάθηση μέσα από πολυάριθμες επαναλήψεις των ίδιων βασικών κειμένων.

Στο μεσαίωνα η εκπαίδευση, επηρεασμένη από τη θεολογία, τοποθετεί την αντίληψη των ιδεών πριν από εκείνη των πραγμάτων. Η θρησκευτική εκπαίδευση επηρέασε πολύ τις κλασικές αντιλήψεις που θα οδηγήσουν αργότερα σε παραδοσιακές πρακτικές της εκπαίδευσης, στις οποίες μπορούμε να αντιπαραθέσουμε τις ιδέες που αναπτύχθηκαν από τον Jean Jacques Rousseau στον 'Αιμίλιο'
«χρειάζεται περισσότερο όχι να του μάθουμε την αλήθεια, αλλά να του δείξουμε τον τρόπο του να ανακαλύπτει μόνος του πάντα την αλήθεια».

Από τη θρησκευτική εκπαίδευση, παραμένουν μέσα στο σχολικό λεξιλόγιό μας οι όροι του «καθήκοντος» και των «σφαλμάτων», τα οποία μεταφράζονται σε «προσωπική εργασία» και σε «αβλεψίες».

Η αρχή του 20^{ου} αιώνα κληρονομεί από αυτές τις *παραδοσιακές αντιλήψεις*, οι οποίες έχουν βασιστεί περισσότερο στην ποιότητα της διδακτέας ύλης, στην επανάληψη και στην απομνημόνευση του μαθητή παρά στη νοημοσύνη του**.**

Αυτές οι ιδέες εκφράζονται μέσα από διαφορετικές μορφές. Ο μαθητής σύμφωνα με την περίπτωση είναι ένας άδειος νους που αρκείται στο να γεμίσει καλά και όχι μια εύπλαστη ζύμη πάνω στον οποίο θα αποτυπωθεί η γνώση. Αυτή η αντίληψη οδηγεί στο να ερμηνευθούν οι διαφορετικές συμπεριφορές των μαθητών απέναντι στη μάθηση με απλοϊκούς όρους, αν δηλαδή το παιδί είναι εκ φύσεως ή όχι προικισμένο με ικανότητα μάθησης. Η μοντέρνα *γενετική* έδειξε το πόσο λίγο ήταν θεμελιωμένες τέτοιες ερμηνείες (Michel Henry, 1991).

2.1 Το παραδοσιακό διδακτικό μοντέλο και οι συνέπειές του. Η μαθηματική γνώση ως προϊόν μετάδοσης.

Στη δεκαετία του ΄70 σε μια ευρείας κλίμακας έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην Αμερική, διαπιστώθηκε ότι το σκηνικό σε όλες τις τάξεις των μαθηματικών ήταν πανομοιότυπο : «Σε όλες τις μαθηματικές τάξεις…, γίνονται πάντα τα ίδια πράγματα με την ίδια σειρά. Πρώτα εξετάζεται το μάθημα της προηγούμενης μέρας και δίνονται οι απαντήσεις. Τα πιο δύσκολα προβλήματα τα λύνει ο δάσκαλος ή κάποιος μαθητής με τη βοήθειά του στον πίνακα. Λίγος σχετικά χρόνος αφιερώνεται

στην παρουσίαση του νέου θέματος και ορίζονται τα νέα προβλήματα που πρέπει να ετοιμάσουν οι μαθητές για την επόμενη μέρα. Αν μείνει κάποιος χρόνος, οι μαθητές αρχίζουν να δουλεύουν πάνω σε αυτά τα προβλήματα μέσα στην τάξη, ενώ ο δάσκαλος τριγυρίζει στην αίθουσα απαντώντας σε απορίες» (Welch 1978 στο NCTM 1991).

Από τις αρχές της δεκαετίας του ’80, σε διεθνές επίπεδο, η Μαθηματική εκπαίδευση σταδιακά αλλά συστηματικά και μεθοδικά, υφίσταται μεταβολές που επεκτείνονται σε όλες τις συνιστώσες της όπως για παράδειγμα στους σκοπούς και στους στόχους , στο περιεχόμενο, στις διδακτικές μεθόδους, στα είδη των δεξιοτήτων που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές, στη διάρθρωση του προγράμματος σπουδών και των διδακτικών βιβλίων, στις μεθόδους αξιολόγησης κτλ.

Οι λόγοι που προκαλούν τις αλλαγές προκύπτουν τόσο από την εξέλιξη των σύγχρονων κοινωνιών και τον συνεχώς διευρυνόμενο ρόλο των Νέων Τεχνολογιών, όσο και από τα συμπεράσματα των ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών σε ζητήματα Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Και στις δύο περιπτώσεις, οι συνέπειες συγκλίνουν στο να δούμε με διαφορετικό τρόπο το ρόλο και τη θέση του καθηγητή των Μαθηματικών μέσα στην τάξη, να δώσουμε ένα ευρύτερο περιεχόμενο στον όρο «Διδασκαλία των Μαθηματικών» και να γίνουμε πιο ακριβείς στο τι μπορεί να σημαίνει «Μαθαίνω Μαθηματικά».

Οι βασικές αρχές που χαρακτηρίζουν το «παραδοσιακό» διδακτικό μοντέλο, είναι οι ακόλουθες δύο, Moreno-Armella and Waldegg (1993) :

- Ο Μαθηματικός Ρεαλισμός.
- Ο Φορμαλισμός.

Ο Μαθηματικός Ρεαλισμός, ο οποίος μπορεί να παρουσιαστεί είτε ως Πλατωνικός Ιδεαλισμός είτε ως Αριστοτελικός Εμπειρισμός, έχει ως αποτέλεσμα το διαχωρισμό του υποκειμένου από τη γνώση: *Η γνώση είναι εξωτερική ως προς τον γνώστη.*

Με τον όρο Φορμαλισμός, εννοούμε το πλαίσιο «νομιμοποίησης» της γνώσης, σύμφωνα με τα standards που ορίζει σε κάθε εποχή η μαθηματική κοινότητα.

Οι δύο αυτές αρχές καθορίζουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο τα Μαθηματικά θεωρούνται ως αντικείμενο διδασκαλίας. Αυτό σημαίνει ότι τα μαθηματικά είναι ένα σώμα γνώσης το οποίο, αφού είναι εξωτερικό ως προς το γνώστη, μπορεί να μεταφερθεί από αυτόν που το κατέχει σε αυτόν που δεν το κατέχει.

Προκειμένου να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, σύμφωνα με το «παραδοσιακό» διδακτικό μοντέλο ο δάσκαλος των μαθηματικών αρχίζει τη διδασκαλία συνήθως με την παρουσίαση μιας τεχνικής, ακολουθούν ασκήσεις για εξάσκηση και ασκήσεις και προβλήματα για εφαρμογή. Το κέντρο βάρους εστιάζεται στην απόκτηση εκείνων ακριβώς των δεξιοτήτων που παρουσιάζει ο δάσκαλος στην τάξη, στην ταχύτητα και την ακρίβεια των απαντήσεων. Το μοντέλο λειτουργεί κάτω από την ακόλουθη υπόθεση: *Το σύνολο των τεχνικών που διαθέτουν οι μαθητές για να λύνουν ασκήσεις είναι το σώμα των γνώσεων που πρέπει να κατέχουν. Επομένως, η ευχέρεια στις τεχνικές αυτές εκφράζει το αν οι μαθητές έχουν μάθει τα Μαθηματικά ή όχι.*

Στο μοντέλο αυτό η γνώση είναι προσωπική υπόθεση του κάθε μαθητή, ο οποίος εργάζεται μόνος του, και είναι ανεξάρτητη από αυτόν. Δηλαδή, ο μαθητής και η γνώση είναι δύο «πράγματα» ξεχωριστά, επομένως ο μαθητής δεν μπορεί να την επηρεάσει, το μόνο που του απομένει είναι να τη μάθει. Τέλος το πρόβλημα και ιδιαίτερα η Λύση Προβλήματος , που αποτελεί την ουσία της Μαθηματικής γνώσης, στο μοντέλο αυτό έχει έναν συγκεκριμένο και περιορισμένο χαρακτήρα, αποτελεί κριτήριο μάθησης: «Σου διδάσκω για παράδειγμα έναν αλγόριθμο και μετά, προκειμένου να διαπιστώσω αν τον έμαθες, θα πρέπει να είσαι ικανός να λύσεις μερικές ή και όλες τις ασκήσεις και τα προβλήματα που βρίσκονται στο τέλος κάθε ενότητας ή κεφαλαίου».

Η πρόσφατη έρευνα έχει αναδείξει τα σημαντικά προβλήματα που παρουσιάζει το «παραδοσιακό» διδακτικό μοντέλο. Για παράδειγμα, έχει διαπιστωθεί ότι η μακρόχρονη «θητεία» στην παραδοσιακή διδασκαλία προκαλεί την ανάπτυξη των ακόλουθων στάσεων και πεποιθήσεων στους μαθητές:

- Όλα τα προβλήματα μπορούν να λυθούν το πολύ σε δέκα λεπτά. Αν δε μπορέσεις να λύσεις ένα πρόβλημα σε δέκα λεπτά, τότε δε μπορείς να το λύσεις, επομένως πάψε να ασχολείσαι με αυτό.

- Μετά από χρόνια απομνημόνευσης αλγορίθμων, κανόνων και τύπων, οι μαθητές θεωρούν τους εαυτούς τους ως παθητικούς δέκτες γνώσεων, που άλλοι πολύ πιο έξυπνοι από αυτούς τις έχουν βρει.

- Για πολλούς μαθητές, ιδιαίτερα όταν ασχολούνται με τη Θεωρητική Γεωμετρία, η απόδειξη δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια «τελετουργική» δραστηριότητα που έχει σκοπό να επιβεβαιώσει αυτό που ήδη είναι γνωστό χιλιάδες χρόνια πριν!

- Τα Μαθηματικά δεν έχουν σχέση με τον πραγματικό κόσμο. Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε και την άποψη του Lakatos:

«Δεν έχει γίνει επαρκώς αντιληπτό ότι η τρέχουσα μαθηματική και επιστημονική εκπαίδευση είναι το θερμοκήπιο ενός ύφους αυθεντίας και ο χειρότερος εχθρός της ανεξάρτητης και κριτικής σκέψης». Βλέπουμε λοιπόν ότι στις περισσότερες περιπτώσεις τα αποτελέσματα της διδασκαλίας είναι ακριβώς τα αντίθετα από τους στόχους και τις επιδιώξεις μας. Η κατάσταση αυτή δεν είναι μόνο ελληνικό φαινόμενο. Είναι μια γενική διαπίστωση που παρουσιάζεται στις περισσότερες χώρες.

Συμπερασματικά το πλαίσιο του «παραδοσιακού» διδακτικού μοντέλου έχει τις ακόλουθες συνέπειες:

Το έργο του δασκάλου : Συνίσταται στη «μεταφορά» της γνώσης στο νου του μαθητή. Ο μαθητής δεν μπορεί να επηρεάσει τη γνώση. Το κύριο «όχημα» μεταφοράς είναι ο λόγος, προφορικός ή γραπτός.

Το έργο της Διδακτικής: Είναι βοηθητικό και περιορίζεται στη βελτιστοποίηση της «μεταφοράς» της γνώσης. Στηρίζεται σε κάποιες αρχές γενικά αποδεκτές όπως π.χ από το απλό στο σύνθετο, από το ειδικό στο γενικό, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο κ.λ.π.

Οι σκοποί και οι στόχοι: Επικεντρώνονται στο περιεχόμενο, γι'αυτό και οι μόνες διδακτικές οδηγίες που πραγματικά «λειτουργούν» είναι όσες αναφέρονται στη διαχείριση της «διδακτέας ύλης».

Η αξιολόγηση: Στο πλαίσιο του Φορμαλισμού, η απάντηση πρέπει να είναι μοναδική, ακριβής, τυπική (Κλαουδάτος, 1996).

Με ποιον τρόπο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την κατάσταση; Με ποιον τρόπο θα δώσουμε μια ισορροπημένη εικόνα στους μαθητές μας και στο κοινωνικό σύνολο γενικότερα, για το τι μπορούμε να κάνουμε με τα Μαθηματικά; Με ποιον τρόπο θα αποφύγουμε αντιλήψεις όπως: «ο δάσκαλος γνωρίζει την απάντηση αλλά μας δίνει το πρόβλημα για να δει αν μπορούμε να τη βρούμε εμείς»;

2.2 Προτάσεις για πιο «ενεργητικές» διδασκαλίες. Η μαθηματική γνώση ως προϊόν κατασκευής.

Η αναπτυξιακή θεωρία του γενετικού επιστημολόγου Jean Piaget (1896-1980) αποτέλεσε το εφαλτήριο για μια νέα κατεύθυνση στην παιδαγωγική ψυχολογία και οδήγησε στη δημιουργία της «θεωρίας κατασκευής της γνώσης» ή «κονστρουκτιβισμό» (constructivism) που αποτελεί την πιο σύγχρονη και αποδεκτή θεωρία γύρω από τη μάθηση και τη διδασκαλία (Τουμάσης, 1994).

Για τον Jean Piaget η γνώση δεν είναι (και δεν μπορεί να είναι) μια «αναπαράσταση» του πραγματικού κόσμου. Αντίθετα, (η γνώση) είναι το σύνολο των εννοιολογικών δομών που προσαρμόζονται και επιβιώνουν στο χώρο της εμπειρίας του υποκειμένου (Von Classerfeld, 1989). Ο Piaget θεωρεί τη δράση του υποκειμένου καθοριστική για τη μάθηση. Ο Gerard Vergnaud, που υπήρξε μαθητής του, θα πει ξεκάθαρα: '*η πράξη είναι πηγή και κριτήριο της γνώσης'* (στα μαθηματικά η πράξη συνίσταται στο να θέσουμε και να επιλύσουμε προβλήματα). Μέσα λοιπόν από αυτή την οπτική γωνία μπορούμε να πούμε ότι το παιδί κτίζει αυτό το ίδιο τη γνώση του.

Εκφράζοντας συνοπτικά τις θέσεις του Κονστρουκτιβισμού η Confrey (1990) γράφει: «Ο Κονστρουκτιβισμός διατυπώνει μια θεωρία για τα όρια της ανθρώπινης γνώσης, και εκφράζει την άποψη ότι όλη η γνώση που έχουμε είναι προϊόν των δικών μας γνωστικών ενεργειών. Δεν μπορούμε να έχουμε άμεση γνώση οποιασδήποτε εξωτερικής ή αντικειμενικής πραγματικότητας. Κατασκευάζουμε τη γνώση μας μέσω των εμπειριών μας και ο χαρακτήρας των εμπειριών μας επηρεάζεται βαθιά από τους γνωστικούς μας «φακούς». Οι μαθηματικοί ενεργούν συνήθως σαν να είχαν οι μαθηματικές ιδέες μια εξωτερική, ανεξάρτητη ύπαρξη…»

Τυπικά, η αρχή του κονστρουκτιβισμού τοποθετείται το 1975 όπου ο Von Classerfeld παρουσίασε τις ιδέες του στην εταιρία Jean Piaget των Η.Π.Α. Οι ιδέες του Classerfeld, στηριγμένες στη γενετική επιστημολογία του Jean Piaget οδήγησαν στον «ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό» (radical constructivism) και άνοιξαν το δρόμο για μια νέα εποχή στη μαθηματική εκπαίδευση.

Οι βασικές αρχές του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού (Lerman, 1989) είναι:

1. **Η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο και δε «συλλαμβάνεται» παθητικά από το περιβάλλον.**

2. **Η γνώση είναι μια διαδικασία προσαρμογής με τον κόσμο των εμπειριών και όχι η ανακάλυψη ενός προϋπάρχοντος κόσμου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από το γνώστη.**

Ο ενήλικας δεν μπορεί να προκαλέσει στο παιδί εμπειρίες διαμέσου των δικών του εμπειριών. Επομένως, ο δάσκαλος δίνει τις ευκαιρίες στο μαθητή για μαθηματικές δραστηριότητες, αλλά εξαρτάται από τον ίδιο το μαθητή να οικοδομήσει τη δική του γνώση μέσα από αυτές τις δραστηριότητες(Cobb and Steffe, 1983,Varela et all, 1991).

Ο κάθε μαθητής έχει το δικό του προσωπικό τρόπο πρόσβασης στη γνώση και βρίσκεται σε κατευθείαν αντίθεση με την αντίστοιχη αρχή του «παραδοσιακού» μοντέλου, ότι ο μαθητής και η γνώση είναι δύο ξεχωριστές έννοιες. Η διαδικασία της μάθησης εξαρτάται από την ήδη υπάρχουσα γνώση: Κάθε τι που μαθαίνω εξαρτάται από το τι γνωρίζω.

Επομένως, ο δάσκαλος των Μαθηματικών πρέπει να είναι ενήμερος για το γεγονός ότι θα υπάρχουν στην τάξη του μαθητές που δεν έχουν κατανοήσει τις προηγούμενες έννοιες προκειμένου να συμμετάσχουν στο νέο μάθημα, και ότι θα υπάρχουν μαθητές που έχουν οικοδομήσει με λάθος τρόπο τις προηγούμενες γνώσεις. Ο δάσκαλος πρέπει να είναι έτοιμος να συναντήσει δυσκολίες στην εξέλιξη του νέου μαθήματος.

Παράλληλα, αναγνωρίζει ότι δεν διδάσκει τους μαθητές μαθηματικά, αλλά τους διδάσκει πώς να αναπτύξουν τη γνώση τους (Confrey, 1990).Ο δάσκαλος είναι ταυτόχρονα και μαθητής στη διαδικασία της διδακτικής πράξης (Steffe and Ambrosio, 1995).

Υπάρχει μια συνεχής αλληλεπίδραση ανάμεσα στο προσωπικό νόημα, που οικοδομεί ο κάθε μαθητής, και στην κοινωνική διάσταση της γνώσης στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Τα προσωπικά νοήματα συζητούνται μέσα στην τάξη προκειμένου να ομογενοποιηθούν και να γίνουν συμβατά και συνεπή με ό,τι δέχεται η μαθηματική κοινότητα (Η αρχή της αλληλεπίδρασης ή διάδρασης).

Ένα γενικό σχήμα της γνωστικής εξέλιξης έχει ως έξης:

Αρχίζουμε από την ήδη υπάρχουσα γνώση, «σταθερή κατάσταση».Μέσα από νέα ερεθίσματα ή νέες πληροφορίες που δίνονται από το δάσκαλο, οι μαθητές βρίσκονται μπροστά σε μια νέα κατάσταση. Αν η ήδη υπάρχουσα γνώση δεν επαρκεί για τη διαπραγμάτευση της νέας κατάστασης, τότε προκύπτει μια «ανισορροπία» και «παλινδρόμηση» ανάμεσα στην υπάρχουσα γνώση και τη νέα κατάσταση όπου ο μαθητής αισθάνεται «αποδιοργανωμένος». Σταδιακά, μέσα από κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις, γίνεται η «αναδιοργάνωση» των γνωστικών του σχημάτων που οδηγεί είτε στην «Αφομοίωση» (Assimilation), είτε στην «Προσαρμογή» (Accomodation).

Αφομοίωση είναι η ικανότητα της νόησης να αντιμετωπίζει νέες καταστάσεις και να λύνει προβλήματα με βάση τα γνωστικά σχήματα που έχει στη διάθεσή της.

Προσαρμογή είναι η λειτουργία της νόησης με την οποία το άτομο αντιμετωπίζει αποτελεσματικά καταστάσεις και προβλήματα, τα οποία δεν είναι σε θέση με την αφομοίωση να τα υπαγάγει σε υπάρχοντα γνωστικά σχήματα. Στην περίπτωση αυτή το άτομο μπορεί είτε να τροποποιήσει ένα υπάρχον γνωστικό σχήμα μέσα στο οποίο εντάσσεται η νέα πληροφορία είτε να δημιουργήσει ένα νέο γνωστικό σχήμα.

Η αφομοίωση έχει ως συνέπεια την ποσοτική μεταβολή των γνωστικών σχημάτων και η προσαρμογή την ποιοτική μεταβολή τους (Κλαουδάτος, 1996).

2.2.1 Κονστρουκτιβισμός, Λύση Προβλήματος και Διδασκαλία.

Μια από τις πιο σοβαρές συνέπειες του Κονστρουκτιβισμού στη διδασκαλία είναι η αναγκαιότητα της αποδοχής ενεργητικών μεθόδων μάθησης. Ο δάσκαλος πρέπει να δώσει την ευκαιρία και τη δυνατότητα στο μαθητή να κατασκευάσει τη γνώση διαμέσου κατάλληλα σχεδιασμένων διδακτικών καταστάσεων. Στην περίπτωση των μαθηματικών, ενεργητικές μέθοδοι μάθησης σημαίνει διδασκαλία με διαδικασίες Λύσης Προβλήματος. Συγκεκριμένα, μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει «κάνω» μαθηματικά δηλαδή διαμορφώνω εικασίες ή προβλέψεις και ερευνώ αν επαληθεύονται ή όχι, γενικεύω, επισημαίνω και εκφράζω μοντέλα συμπεριφοράς (patterns), μοντελοποιώ, «οπτικοποιώ»(visualizing), συνδέω ιδέες και προηγούμενες γνώσεις κ.τ.λ.

Πρόβλημα είναι ένα ασυνήθιστο θέμα για το οποίο ο λύτης, λογικά δεν αναμένεται να γνωρίζει αυτομάτως το δρόμο προς τη λύση. Έτσι, έχει ένα μεγάλο ποσοστό αυτονομίας ερευνώντας διάφορες εκδοχές και αποφασίζοντας τι να δοκιμάσει, εκμεταλλευόμενος το «απόθεμα» όλων των γνώσεων που διαθέτει (Burkhardt-Schoenfeld).

Τα προβλήματα και η διαδικασία επίλυσης προβλήματος «εγκαθιστούν» τόσο την ανάγκη για μαθηματική γνώση όσο και το πλαίσιο μέσα στο οποίο οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά (Owens, 1992). Ωστόσο, τα προβλήματα μπορούν να αναπτύξουν τη γνώση μόνο στο βαθμό που οι μαθητές τα βρίσκουν ενδιαφέροντα και θεωρήσουν ότι η γνώση που θα αναπτύξουν ασχολούμενοι με αυτά έχει κάποια αξία, πρακτική ή θεωρητική, έχει γι'αυτούς προσωπικό νόημα (Papert, 1980).

Οι Yackel, Cobb και Wood (1991), θεωρούν ότι, στα πλαίσια του Κονστρουκτιβισμού, οι μαθητές δεν μαθαίνουν μαθηματικά εσωτερικεύοντας προσεκτικά προετοιμασμένες και πλήρως οργανωμένες και παρουσιασμένες έννοιες και αλγόριθμους. Αντίθετα, μαθαίνουν μαθηματικά με την οργάνωση και την επανοργάνωση, από τους ίδιους, των δραστηριοτήτων και των εμπειριών τους.

Οι Cobb και Steffe (1993), σημειώνουν ότι η εφαρμογή του κονστρουκτιβισμού στην τάξη, μπορεί να έχει την ακόλουθη μορφή : Ο δάσκαλος των μαθηματικών δίνει στους μαθητές ένα ή ένα σύνολο προβλημάτων, στην πραγματικότητα ένα σύνολο από δραστηριότητες, και οι μαθητές δουλεύουν πάνω σε αυτές. Η εργασία τους θα

πρέπει να τους οδηγεί να κάνουν υποθέσεις και εικασίες, να ελέγχουν τις υποθέσεις τους, να παρατηρούν και να αναπτύσσουν ένα μοντέλο, να ακολουθούν προσεγγιστικές και αριθμητικές μεθόδους, να «μεταφράζουν» ένα μοντέλο από ένα σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο, για παράδειγμα από γλωσσική περιγραφή σε αλγεβρικό τύπο, από αλγεβρικό τύπο σε γραφική παράσταση, από πίνακα τιμών σε αλγεβρικό τύπο κ.τ.λ.

Το ζητούμενο λοιπόν είναι η ανάπτυξη μιας ενεργητικής και ερευνητικής στάσης των μαθητών ως προς τα Μαθηματικά. Το πρόβλημα είναι «πηγή» νοήματος της μαθηματικής γνώσης. Κάθε δάσκαλός των μαθηματικών θα πρέπει να έχει υπόψη του ότι με τα προβλήματα :

1. Δικαιολογούμε την ίδια τη διαδικασία της διδασκαλίας, αποκαλύπτοντας την αξία και τη χρησιμότητα των μαθηματικών.
2. Δίνουμε κίνητρα στους μαθητές να ενδιαφερθούν για τα μαθηματικά.
3. Εισάγουμε με φυσικό τρόπο έννοιες ή διδακτικές ενότητες.
4. Βοηθούμε τους μαθητές να αναπτύξουν τις γνώσεις τους με πιο αποτελεσματικό τρόπο.
5. Ελέγχουμε το βαθμό κατανόησης των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες.

Συμπερασματικά, ένα μαθηματικό πρόβλημα συμβατό με την πραγματικότητα καλεί το μαθητή να το προσεγγίσει με πράγματα και καταστάσεις που ήδη γνωρίζει, γιατί έτσι μόνο μπορεί να το καταλάβει. Ενθαρρύνουμε το μαθητή να χρησιμοποιήσει στρατηγικές βασισμένες στις ευρετικές του Polya όπως:

Μπορεί αυτό το πρόβλημα να διαιρεθεί σε απλούστερα προβλήματα;

Μπορεί να συσχετιστεί με κάποιο πρόβλημα του οποίου γνωρίζω ήδη τη λύση;

Για να το λύσεις ψάξε να βρεις κάτι που μοιάζει με αυτό το οποίο ήδη καταλαβαίνεις. Δες το σαν παιχνίδι, αν βρεις δυσκολία ψάξε άλλο δρόμο, κάντο μόνος σου.

Ο στόχος που επιδιώκεται μέσω των επιμέρους ερωτήσεων είναι η ανακάλυψη της δομής του προβλήματος, η επαναδιατύπωσή του και η αναζήτηση της σχέσης των μερών με το όλο που θα οδηγήσει τελικά στη λύση. Επιπρόσθετα επιδιώκεται να αισθανθεί ο μαθητής τη δύναμη του να ελέγχει, να επιλέγει ο ίδιος τον τρόπο σκέψης και δράσης μέσα από μια μεγάλη ποικιλία. Αυτό είναι πολύ διαφορετικό από αυτό που συμβαίνει συνήθως στο σχεδιασμό της σύγχρονης εκπαίδευσης (Papert, 1980).

2.2.2 Λάθη και εμπόδια

1. Ο ρόλος του λάθους στη διαδικασία μάθησης.

Τα λάθη πάντα παρόντα στα έργα των μαθητών, απασχολούν ένα μεγάλο μέρος των εργασιών στην παιδαγωγική.

Στην παραδοσιακή διδασκαλία , το λάθος εκτιμάται γενικά ως μια δυσλειτουργία της γνώσης του μαθητή την οποία μια σωστή μάθηση θα όφειλε να αποτρέψει. Οι διδάσκοντες απογοητεύονται συχνά, όταν επικεντρώνονται στο στόχο απάλειψης των λαθών. Οι μαθητές τα βιώνουν άσχημα, αφού για αυτούς το λάθος είναι συνώνυμο

της αποτυχίας. Το αίσθημα αυτό ενισχύεται όταν το λάθος χαρακτηρίζεται ως «παράπτωμα».

Επίσης, στις παραδοσιακές παιδαγωγικές, το λάθος πρέπει να καταργηθεί με κάθε θυσία. Σύμφωνα με αυτές, ο καθηγητής προλαβαίνει τους μαθητές: 'Προσοχή, εδώ υπάρχει κάποιο λάθος ή κάποια λάθη που δεν πρέπει να κάνεις',… εξηγεί υπερβολικά, εξηγεί ξανά και αν αυτό δεν αρκεί, αν ο μαθητής κάνει ακόμα πολλά λάθη, του προτείνει να επαναλάβει την τάξη(Henry. M., 1991).

Σύμφωνα με τις εργασίες των Gaston Bachelard και Jean Piaget, η *κατασκευαστική* αντίληψη υποστηρίζει ότι το λάθος παίζει ένα ρόλο θεμελιακά διαφορετικό. Τα λάθη των μαθητών «μας ενδιαφέρουν», όσο είναι αποδοτικά για τη μάθηση. Το διδακτικό συμβόλαιο είναι λοιπόν κατά βάθος τροποποιήσιμο.

Η επιλογή στρατηγικών βασισμένες στις ευρετικές του Polya δεν εξασφαλίζει βέβαια στους μαθητές ότι ακολουθώντας αυτό το δρόμο φτάνουν πάντα στο σωστό αποτέλεσμα. Η διαφορά είναι ότι θεωρείται σημαντικότερος ο δρόμος προς τη λύση με τις δυσκολίες του, τα παρακλάδια του και τα εμπόδιά του, παρά το τέρμα αυτού του δρόμου και άρα το ορθό ή όχι του αποτελέσματος.

Το σφάλμα δεν είναι πάντα προφανές ή ορατό από τους μαθητές. Αυτό που πρέπει να τους διδάξουμε είναι η αναζήτηση του λάθους. Μια ενδιαφέρουσα πρόταση είναι να μάθουμε στους μαθητές να υποδιαιρούν ένα πρόβλημα σε επιμέρους ενότητες έτσι ώστε να μπορούν να διορθώσουν τα λάθη του κάθε μέρους ξεχωριστά.

Το πλεονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι ότι δουλεύοντας με μικρά τμήματα τα λάθη μπορούν να περιοριστούν και να παγιδευτούν ευκολότερα. Παράλληλα, η εξερεύνηση του προβλήματος δίνει το κίνητρο στο μαθητή να αναλογιστεί τις διαδικασίες που ακολουθήθηκαν, να αποδεχτεί κάποιες, να απορρίψει κάποιες άλλες και να καταλήξει στο ότι ο ασφαλέστερος δρόμος για να επιτύχεις κάτι είναι να μην κάνεις ούτε ένα βήμα που δεν καταλαβαίνεις (Papert, 1980).

Συνοψίζοντας, αναφέρουμε ένα απόσπασμα του Herbert Ginsburg (από το 'Children's Arithmetic', 1977): «Σε τελευταία ανάλυση, δε βοηθάει σε τίποτα να εξηγηθούν τα λάθη με όρους έλλειψης εξυπνάδας ή επιδεξιότητας στα μαθηματικά. Τέτοιες αντιλήψεις συσκοτίζουν το γεγονός ότι τα λάθη είναι αποτέλεσμα συστηματικών στρατηγικών λογικής προέλευσης».

2. Η έννοια του εμποδίου

Ο Guy Brousseau παραπέμπει σε μια διδακτική θεωρία των λαθών και γράφει:

«*ένα εμπόδιο εκδηλώνεται λοιπόν από τα λάθη, αλλά αυτά τα λάθη δεν οφείλονται στην τύχη. Παροδικά και άτακτα, αναπαράγονται επίμονα. Επιπλέον αυτά τα λάθη, στο αυτό υποκείμενο, συνδέονται μεταξύ τους με μια κοινή αιτία: μια μέθοδο του γνωρίζειν, μια χαρακτηριστική αντίληψη, συνεκτική αν όχι σωστή, μια παλιά 'γνώση' και η οποία κατάφερε να κυριαρχεί μέσα σε κάθε περιοχή δράσης*».

Ένα εμπόδιο είναι μια αντίληψη, πιθανώς μια γνώση, η οποία, ενώ ήταν αποτελεσματική στην επίλυση ενός τύπου προβλημάτων, αποτυγχάνει στην επίλυση ενός άλλου τύπου προβλημάτων. Λόγω της προηγούμενης επιτυχίας «αντιστέκεται» σε προσπάθειες τροποποίησης ή απόρριψης με αποτέλεσμα να γίνεται εμπόδιο στην ανάπτυξη νέας γνώσης.

Στην διδακτική, διακρίνουμε τα 5 ακόλουθα χαρακτηριστικά για ένα εμπόδιο:

1. Αποτελεί γνώση (όχι έλλειψη γνώσης!).
2. Επιτρέπει να παραχθούν απαντήσεις προσαρμοσμένες σε ορισμένα προβλήματα ή κατηγορίες προβλημάτων.
3. Οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις για άλλους τύπους προβλημάτων.
4. Παρουσιάζει μια αντίσταση στην όποια τροποποίηση ή μεταμόρφωση μιας γνώσης και εκδηλώνεται με παλινδρομικό τρόπο (Δηλαδή επανεμφανίζεται να κυριαρχεί σε ορισμένες καταστάσεις, ακόμα και αν έχει αντικατασταθεί προφανώς από μια καινούρια γνώση).
5. Η απόρριψη αυτής της γνώσης θα οδηγήσει σε μια νέα.

Έτσι, μια κατάσταση ρήξης, βιωμένη από το μαθητή, μέσα στην οποία μια παλιά γνώση θα παράγει λάθη, θα έχει ως αποτέλεσμα να φανερωθούν ένα ή περισσότερα εμπόδια καθώς και να εκφραστούν λανθασμένες αντιλήψεις ή αλγόριθμοι που, για να ξεπεραστούν, θα πρέπει να οδηγήσουν στην εγκατάσταση μιας καινούριας γνώσης.

Σε αυτήν την οπτική που εξετάζουμε, **το λάθος είναι απαραίτητο**:

- Στο μαθητή για να μπει στην πορεία των παραπάνω εξελίξεων.
- Στον εκπαιδευτικό για να ταξινομήσει τις αντιλήψεις του μαθητή, ενδεχομένως να καταλάβει τα εμπόδια που προκύπτουν και για να προσαρμόσει τη διδακτική κατάσταση.

Είναι προφανές λοιπόν ότι το διδακτικό συμβόλαιο οφείλει όχι μόνο να δεχτεί το λάθος (το δικαίωμα στο λάθος), αλλά να το προκαλέσει για να το εξερευνήσει (Henry. M., 1991).

Τα λάθη των μαθητών λοιπόν μας ενδιαφέρουν. Μπορούν να μας οδηγήσουν σε γόνιμες ανακαλύψεις εάν είναι σημαντικά. Το ‘εάν’ είναι σχεδόν περιττό. Στην πραγματικότητα πολλά λάθη γίνονται λόγω επιπολαιότητας. Αν υπάρχουν λάθη από απροσεξία, η έκφρασή τους αποτελεί συχνά μια σημασία: Ο μαθητής δεν έγραψε στην τύχη, η εργασία του οδηγήθηκε από μια κρυφή πορεία.

Η ανάλυση αυτών των λαθών απαιτεί από τον εκπαιδευτικό μεγάλη προσοχή και ιστορική καλλιέργεια, επιστημονική και διδακτική. Όταν ένα εμπόδιο εντοπίζεται, πρέπει να δράττεται η ευκαιρία και να τίθεται ο μαθητής σε μια κατάσταση όπου θα μπορέσει να το ξεπεράσει για πάντα. Ο χρόνος που θα κερδηθεί είναι πολύ σημαντικός για τη μάθηση.

Οι εκπαιδευτικοί έχουν πλήθος παιδαγωγικών επιλογών στη διάθεση τους για τον τρόπο που θα διαχειριστούν τα σφάλματα: να δρουν με αυτά ή να δρουν εναντίον

τους ή να δρουν μέσω αυτών, να τα αποφεύγουν ή να τα εξαφανίζουν**. Η χειρότερη επιλογή θα ήταν να τα αγνοήσουν.**

2.2.3 Ο ρόλος του δασκάλου

Κάθε δάσκαλος που αποδέχεται τις αρχές του κονστρουκτιβισμού, πρέπει να δει με έναν διαφορετικό τρόπο τη θέση και το ρόλο του μέσα στην τάξη.

Ένα μεγάλο μέρος της υπευθυνότητας του δασκάλου των μαθηματικών είναι ο σχεδιασμός των κατάλληλων Διδακτικών Καταστάσεων. Μέσω αυτού του σχεδιασμού θα πρέπει να προτείνονται δραστηριότητες με τις οποίες ο μαθητής αναζητά την κατάλληλη απάντηση από ένα ευρύ φάσμα επιλογών και όχι μια συγκεκριμένη και τυποποιημένη. Κατά το σχεδιασμό, ο διδάσκοντας πρέπει να πάρει τις αφηρημένες μαθηματικές ιδέες και έννοιες και να τις ενσωματώσει σε ένα πλαίσιο κατάλληλο για τους μαθητές. Επειδή όμως μάθηση σημαίνει, ανάμεσα σε άλλα, αναγνώριση και χρησιμοποίηση των ιδεών αυτών σε διάφορα πλαίσια και καταστάσεις, θα πρέπει στη συνέχεια να τις καταστήσει ανεξάρτητες από τα συγκεκριμένα πλαίσια των προβλημάτων στα οποία παρουσιάστηκαν. Θα κάνει λοιπόν τον κύκλο: Αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, συγκεκριμένα προβλήματα, αφηρημένες μαθηματικές έννοιες (Κλαουδάτος, 1996)

Στο σχεδιασμό του μαθήματος βοηθάει η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων η οποία συνδέει τη λύση προβλήματος με τη διδασκαλία. Ο Guy Brousseau στην ανάλυσή του σχετικά με τη θεωρία αυτή διακρίνει:

1. τις *καταστάσεις πράξης*, όπου ο μαθητής εκφράζει ορισμένες γνώσεις, υπό μορφή λήψης αποφάσεων.
2. τις *καταστάσεις διατύπωσης*, όπου ο μαθητής εκφράζει, με δική του γλώσσα εικασίες, σχετικά με γνωστές ιδιότητες και διαδικασίες, που θα ενεργοποιήσει.
3. τις *καταστάσεις κύρωσης,* όπου οι υποθέσεις-εικασίες δίνουν τη θέση τους στην επιχειρηματολογία και όπου ξεκινάει μια διαδικασία απόδειξης.
4. τις *καταστάσεις θεσμοποίησης*, όπου οι επικαλούμενες γνώσεις καθιερώνονται ως γνώσεις αποδεκτές από τη μαθηματική κοινότητα, ερμηνευμένες με όρους αυστηρούς, αποπλαισιωμένους και αποπροσωποποιημένους.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης και ιδιαίτερα κατά τη λύση προβλήματος, ο δάσκαλος πρέπει να έχει σχεδιάσει οι παρεμβάσεις του να είναι τέτοιες ώστε έμμεσα να κατευθύνεται η προσοχή των μαθητών στα σημεία της δραστηριότητας που θα τους οδηγήσουν στην αποκάλυψη μαθηματικών νοημάτων και σχέσεων.

Η ανάπτυξη εικασιών και υποθέσεων από τους μαθητές και η τάση για τον έλεγχό τους είναι ένα σαφές μήνυμα ότι έχουν αρχίσει να διαμορφώνουν την ενεργητική και ερευνητική στάση ως προς τα μαθηματικά. **Μόνον αφού έχουν βρει τα δικά τους αποτελέσματα και έχουν αναπτύξει τις εικασίες τους, οι μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα της γενίκευσης και της απόδειξης.**

Για την ακρίβεια, όταν οι μαθητές βρουν τα δικά τους αποτελέσματα, τότε η απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί σημαντική, γιατί τότε έχουμε ανάγκη να πειστούμε για πράγματα που δεν είμαστε βέβαιοι ενώ στις περισσότερες περιπτώσεις στο σχολείο παρουσιάζονται αποδείξεις για αποτελέσματα που οι μαθητές θεωρούν ότι κανείς δεν μπορεί να έχει αμφιβολία!

Στα πλαίσια αυτά, ιδιαίτερα σημαντικό είναι, ο δάσκαλος να αποποιηθεί το ρόλο της «αυθεντίας» που κατείχε στο παραδοσιακό σχολείο. Πολλές φορές οι προτάσεις των μαθητών ή οι λύσεις στις οποίες καταλήγουν διαφέρουν ριζικά από την ατζέντα που έχει στο μυαλό του ο δάσκαλος. Σε αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να είναι πάντα έτοιμος και πρόθυμος να διαπραγματευτεί με τους μαθητές, να τροποποιήσει ή ακόμη και να απορρίψει κάποια πιστεύω του, προκειμένου όλοι μαζί να καταλήξουν σε λύσεις κοινά αποδεκτές.

Είναι σπουδαίο, κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης, ο μαθητής να μπορεί να μοιράζεται τις εμπειρίες του με αυτές του δασκάλου. Αυτό επιτρέπει στο παιδί να μάθει από τον ενήλικα όχι «κάνοντας αυτό που λέει ο δάσκαλος» αλλά «κάνοντας αυτό που κάνει ο δάσκαλος» και ένα από τα πράγματα που κάνει ο δάσκαλος είναι να κυνηγήσει το πρόβλημα μέχρι να γίνει απόλυτα κατανοητό (S. Papert, 1980, M. Donaldson, 1984, M. Hughes, 1986,).

Χαρακτηριστικά η M. Donaldson λέει: **«Η ουσία της τέχνης του δασκάλου βρίσκεται στο να αποφασίζει το είδος της βοήθειας που χρειάζεται σε κάθε περίπτωση το παιδί και τον καλύτερο τρόπο για να το προσφέρει».**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

Συνεργατική Μάθηση

3.1 Τα συστατικά στοιχεία της συνεργατικής μάθησης.

Από τα πρώτα βήματα του ανθρώπου βλέπουμε τις προσπάθειες του να δημιουργήσει κάποια μορφή ομάδας (είτε αυτό λεγόταν φυλή είτε κοινωνικό σύνολο) αφού με αυτό τον τρόπο ένιωθε πιο δυνατός και λιγότερο τρωτός. Η πολυπλοκότητα της σύγχρονης κοινωνίας, καθώς και η εξειδίκευση που επιβάλλεται από τις απαιτήσεις της αγοράς εργασίας καθιστούν την ανάγκη για ομαδική εργασία και συνεργασία ακόμη πιο επιτακτική, ώστε να μπορέσουν οι άνθρωποι να αντιμετωπίσουν επιτυχώς τα καθημερινά προβλήματα με τα οποία έρχονται αντιμέτωποι

Η εκπαίδευση, που σαν βασικό της στόχο έχει την κοινωνικοποίηση των μαθητών, δε μπορούσε να αγνοήσει αυτή την ανάγκη. Έτσι, η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων που προσφέρει η συνεργασία, οδήγησε στην υιοθέτηση της Συνεργατικής Μάθησης (ΣΜ) σαν μιας νέας διδακτικής προσέγγισης. Παρόλο ότι τα τελευταία χρόνια δίδεται πολλή έμφαση στη χρήση αυτής της μεθόδου, η ΣΜ δεν είναι κάτι το καινούργιο στην εκπαίδευση. Τα θεμέλια της βρίσκονται, σύμφωνα με τον Slavin (1995), πίσω στις αρχές του 17^{ου} αιώνα. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα δόθηκε νέα ώθηση από τον αμερικανό John Dewey, ο οποίος θεωρεί την αγωγή μια "ακατάπαυστη αλληλεπίδραση ανάμεσα σ΄ ένα άτομο και τα αντικείμενα ή άλλα άτομα" (Κανάκης, 1987, σ. 36). Ο ίδιος θεωρεί σαν ιδανικό σχολείο το χώρο στον οποίο τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να δημιουργήσουν διαπροσωπικές σχέσεις, να ασκούνται στην αποδοτική συνεργασία και να γίνονται ενεργητικά και υπεύθυνα άτομα. Υποστήριζε πως για να μάθουν οι άνθρωποι να συνεργάζονται πρέπει να βιώσουν τη συνεργατική διαδικασία μέσα στο σχολείο.

Όμως τι εννοούμε με τον όρο Συνεργατική Μάθηση; Κατά καιρούς δόθηκαν και δίδονται πολλοί ορισμοί. Σύμφωνα με τους Johnson, Johnson and Holubec (1990) Συνεργατική Μάθηση είναι η οργάνωση της τάξης σε μικρές ομάδες με σκοπό τη δημιουργική συνεργασία των μαθητών για μεγιστοποίηση της δικής τους μάθησης, αλλά και της μάθησης των άλλων μελών της ομάδας. Μέσω των συνεργατικών δραστηριοτήτων που τους ανατίθενται από τον εκπαιδευτικό, τα μέλη της ομάδας επιδιώκουν αποτελέσματα τα οποία είναι επωφελή για τους ίδιους, αλλά και για τα άλλα μέλη της ομάδας.

Οι ίδιοι τονίζουν πως στη Συνεργατική μάθηση παύει να υπάρχει ανταγωνιστικότητα μεταξύ των μαθητών αφού δρουν σαν μια ομάδα με ένα γενικό στόχο, που για να επιτευχθεί πρέπει όλα τα μέλη να συνεργάζονται αρμονικά, αφού ισχύει ότι για να πάει μπροστά η ομάδα πρέπει να νοιάζονται «*ο ένας για τον άλλο και όλοι για τον ένα*» που τόσο εύστοχα δείχνει την φιλοσοφία αυτής της διδακτικής προσέγγισης. Κατ' επέκταση και η αποτυχία της ομάδας επιβαρύνει όλα τα μέλη .

Όπως φαίνεται από τα πιο πάνω, βασικό συστατικό της ΣΜ είναι η ομάδα. Ο Κανάκης (1987) ορίζει την ομάδα σαν ένα οργανωμένο υποσύνολο με δύο ή περισσότερα μέλη, που συνδέονται με κοινά ενδιαφέροντα, βρίσκονται σε άμεση επικοινωνία, αναπτύσσουν στενές διαπροσωπικές σχέσεις, έχουν «εμείς» συνείδηση,

αναγνωρίζουν ορισμένους δεσμευτικούς κανόνες συμπεριφοράς και επιδιώκουν με προθυμία κοινούς σκοπούς.

Οι Johnson, Johnson and Holubec (1990) θεωρούν ότι για να είναι αποτελεσματική μια ομάδα πρέπει να αποτελείται από δύο ως πέντε μέλη. Φυσικά, με το να τοποθετηθούν απλά δύο ως πέντε μαθητές σε μια ομάδα, δε σημαίνει ότι αυτομάτως θα έχουμε συνεργασία και συνεργατική μάθηση. Αποτελεσματική συνεργατική μάθηση λαμβάνει χώρα όταν υπάρχουν σε αυτή κάποια ουσιώδη συστατικά.

Τα συστατικά στοιχεία της Συνεργατικής Μάθησης, σύμφωνα με τους Johnson, Johnson and Holubec (1990), είναι:

- **Κοινός στόχος:** Για να υπάρχει συνεργατική προσπάθεια πρέπει να υπάρχει ο κοινός μαθησιακός στόχος, το ομαδικό αποτέλεσμα. Ο κοινός στόχος μπορεί να είναι η λύση ενός προβλήματος στα Μαθηματικά με τη χρήση της Logo, ένα πείραμα στη Φυσική με τη χρήση λογισμικού προσομοίωσης (simulation), η νοηματική επεξεργασία ενός κειμένου στα Ελληνικά με ένα επεξεργαστή κειμένου, μια μελέτη στην Ιστορία κ.ά.

- **Αλληλεπίδραση πρόσωπο με πρόσωπο**: Δεν μπορεί να νοηθεί συνεργασία, αν δεν υπάρχει μια συνεχής αλληλεπίδραση των μελών της ομάδας. Η αλληλεπίδραση εκδηλώνεται ως αμοιβαία βοήθεια, αμοιβαίος επηρεασμός, ενίσχυση και ενθάρρυνση, προσφορά γνώσεων και πληροφοριών, ανταλλαγή υλικού, ανατροφοδότηση συμμαθητών κ.ά.

- **Αλληλεξάρτηση**: Η έννοια της αλληλεξάρτησης είναι το κλειδί της επιτυχίας της Συνεργατικής Μάθησης. Αλληλεξάρτηση υπάρχει όταν η ομάδα για να επιτύχει το έργο της χρειάζεται και εξασφαλίζει τη συμβολή του κάθε μέλους της. Αλλά και αντίστροφα, κάθε μέλος της ομάδας επιτυγχάνει το στόχο του μόνο αν και τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας επιτύχουν τους δικούς τους στόχους.

- **Κοινωνικές δεξιότητες**: Μαθητές που δεν κατέχουν βασικές κοινωνικές δεξιότητες είναι δύσκολο να επιτύχουν συνεργασία υψηλής ποιότητας. Γι΄ αυτό πρέπει τα παιδιά να διδάσκονται πρώτα συνεργατικές δεξιότητες και στη συνέχεια να ασκούνται μέσα στην ομάδα για την εφαρμογή των. Ο χαμηλός τόνος φωνής, η άσκηση ηγετικού ρόλου, η αποδοχή της διαφορετικότητας η έκφραση διαφωνίας είναι μερικές δεξιότητες που πρέπει να αποκτηθούν για να γίνει η συνεργατική προσπάθεια πιο αποδοτική.

- **Προσωπική ευθύνη.** Ο μεγαλύτερος κίνδυνος για να αποτύχει η Συνεργατική Μάθηση είναι όταν αφεθεί ένα μέλος να κυριαρχήσει στην ομάδα και να επιβάλλει την άποψή του ή να υποβάλλει τις λύσεις και τις απαντήσεις. Στην περίπτωση αυτή τα άλλα μέλη όχι μόνο δεν ωφελούνται αλλά συνήθως αδρανοποιούνται και οπισθοδρομούν. Ιδιαίτερη μέριμνα χρειάζεται ώστε κάθε μέλος να καθίσταται προσωπικά υπεύθυνο για την επιτυχία της ομάδας. Αυτό επιτυγχάνεται αν εξασφαλιστεί η θετική αλληλεξάρτηση που αναφέρθηκε πιο πάνω.

Η θετική αλληλεξάρτηση των μελών της ομάδας είναι ο πιο σημαντικός παράγοντας για τη δημιουργία συνεργατικών συνθηκών. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές για να επιτύχουμε την αλληλεξάρτηση:

- **Αλληλεξάρτηση αμοιβών:** Μια άποψη υποστηρίζει ότι η ύπαρξη μόνο κοινού στόχου δεν είναι αρκετό κίνητρο για να δημιουργήσει την αλληλεξάρτηση. Εκείνο που δημιουργεί την αλληλεξάρτηση είναι η ομαδική αμοιβή. Ως ομαδική αμοιβή μπορεί να θεωρηθεί ένας κοινός βαθμός στην ομάδα ή ο μέσος όρος των ατομικών βαθμών των μελών της.
- **Αλληλεξάρτηση ρόλων:** Η κατανομή ρόλων μέσα στην ομάδα δημιουργεί άλλη μια μορφή αλληλεξάρτησης. Η επίτευξη του κοινού στόχου εξαρτάται από το πόσο σωστά θα παίξει το ρόλο του το κάθε μέλος. Η ανάληψη συγκεκριμένου ρόλου μέσα στην ομάδα καθιστά το κάθε μέλος προσωπικά υπεύθυνο για το ομαδικό αποτέλεσμα και εξασφαλίζει υψηλότερο βαθμό συνοχής. Οι κυριότεροι ρόλοι που μπορούν να αναληφθούν στην ομάδα είναι: ο συντονιστής, ο γραμματέας, ο αναγνώστης, ο εμψυχωτής, ο χρονομέτρης, ο προμηθευτής κ.ά. Οι ρόλοι εναλλάσσονται σε τακτά χρονικά διαστήματα
- **Αλληλεξάρτηση πηγών:** Ο περιορισμένος αριθμός πηγών στην ομάδα δημιουργεί την ανάγκη αλληλεξάρτησης. Αν για παράδειγμα, δοθεί ένα φυλλάδιο σε κάθε μέλος της ομάδας, διευκολύνεται η ατομική προσπάθεια. Αν όμως, δοθεί ένα φυλλάδιο στην ομάδα, δημιουργείται η ανάγκη αλληλεξάρτησης και συνεργασίας.
- **Αλληλεξάρτηση έργου:** Η πιο αποτελεσματική μορφή αλληλεξάρτησης είναι ο καταμερισμός έργου στα μέλη της ομάδας. Ένας τρόπος είναι κάθε μέλος να αναλαμβάνει τη διεκπεραίωση ενός μέρους της ομαδικής εργασίας και στη συνέχεια να γίνεται η σύνθεση των επί μέρους εργασιών στην ομάδα, ύστερα από συζήτηση.

3.2 Η χρησιμότητα της συνεργατικής μάθησης στη διαδικασία της μάθησης.

Η ΣΜ είναι μια μέθοδος που αρχικά επινοήθηκε για να αναπτύξει τις κοινωνικές δεξιότητες του εκπαιδευομένου, την ανάπτυξη των σχέσεων μεταξύ των μελών της ομάδας, με τη συνεπακόλουθη ανάπτυξη των αισθημάτων αλληλοβοήθειας, εμπιστοσύνης, συνεργασίας (συζήτηση και επίλυση ενός προβλήματος). Στα πλαίσια της ομαδικής εργασίας αναπτύσσεται το αίσθημα της θετικής αλληλεξάρτησης, αφού η επιτυχία της ομάδας εξαρτάται από την επιτυχία κάθε μέλους της, και αντίστροφα. Η ανάπτυξη αυτών των διαπροσωπικών σχέσεων βοηθούν στην δημιουργία κοινωνικών προσώπων και όχι προσώπων κλεισμένων στον εαυτό και την μοναξιά τους.

Παράλληλα έχουμε καλύτερη χρήση του διδακτικού χρόνου. Ελαττώνονται οι ανταγωνιστικές δομές, αφού μεταξύ των μαθητών μειώνεται ο ανταγωνισμός και ενισχύεται η συνεργασία.

Έχουμε κάποιο είδος «ανεξαρτησίας» από τον εκπαιδευτικό, αφού οι ομάδες έχουν ψηλότερο βαθμό αυτονομίας. Ελευθερώνεται με αυτό τον τρόπο ο εκπαιδευτικός, ο οποίος μπορεί να διαθέσει τον χρόνο του πιο εποικοδομητικά.

Έχουμε ανάπτυξη της προσωπικής ευθύνης, αφού ο μαθητής επιδιώκει να μάθει ο ίδιος και ελέγχει αν τα υπόλοιπα μέλη μαθαίνουν.

Αυξάνεται η αυτοπεποίθηση, αφού τώρα πια ο μαθητής είναι ενεργό μέλος μιας ομάδας με άποψη και με προσφορά για την επίτευξη του κοινού στόχου.

Όλα τα μέλη, λόγω ηθελημένης ανομοιογένειας, μπορούν να αφομοιώσουν σκέψεις, λύσεις και προτάσεις από τα υπόλοιπα μέλη, κάτι που βοηθάει στην μάθηση και την κατάκτηση της γνώσης πιο γρήγορα.

Έχει παρατηρηθεί ότι με την χρήση της ΣΜ αναπτύσσεται μια θετικότερη στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα (κίνητρο για μάθηση) αλλά και απέναντι στον δάσκαλο.

Όμως τα πλεονεκτήματα της ΣΜ δεν σταματούν εκεί. Η βιβλιογραφία αναφέρει ότι υπάρχουν πολύ θετικά αποτελέσματα και στους άλλους τομείς ανάπτυξης του παιδιού, το γνωστικό και το συναισθηματικό.

Οι Κουτσελίνη και Θεοφιλίδης (1998) αναφέρουν ότι κατά τη συνεργατική μάθηση αναπτύσσονται παράλληλα και αποτελεσματικά ο ακαδημαϊκός, ο συναισθηματικός και ο συμμετοχικός τομέας. Όσο αφορά την ακαδημαϊκή επίδοση, αναφέρουν ότι διευρύνεται ο ορίζοντας σκέψης του κάθε μέλους μέσα από την αντιπαράθεση ιδεών στα πλαίσια της ομάδας. Η ανάπτυξη της διαδικασίας μάθησης στην ομάδα γίνεται με μεθοδικότητα, έτσι που το παιδί να έχει το μεγαλύτερο χρόνο ενεργητικής συμμετοχής. Παράλληλα, ενεργοποιούνται όλοι οι μαθητές, συνεξετάζοντας διάφορα θέματα, ενώ εξηγώντας ο ένας στον άλλο τον τρόπο σκέψης του ή συγκεκριμένα νοήματα του κειμένου μαθαίνουν να κατανοούν οι ίδιοι καλύτερα. Η γλωσσική τους ικανότητα βελτιώνεται σημαντικά, αφού έχουν την ευκαιρία να μιλούν περισσότερο.

Θετικά αποτελέσματα παρουσιάζονται και όσον αφορά το συναισθηματικό τομέα, αφού οι μαθητές που εργάζονται συνεργατικά έχουν πιο θετική συμπεριφορά και καλύτερες διαπροσωπικές σχέσεις (Χαραλάμπους, 1996). Επιπλέον οι Κουτσελίνη και Θεοφιλίδης (1998) αναφέρουν ότι τα άτομα που είναι μέλη μεικτών ομάδων, μαθαίνουν να αποδέχονται όλα τα μέλη της ομάδας ως ισότιμα και νιώθουν συνυπεύθυνα για τα αποτελέσματα της ομαδικής εργασίας. Ως αποτέλεσμα αποκτούν θετική αυτοεικόνα, καλλιεργούν θετικές στάσεις έναντι της σχολικής εργασίας και του σχολικού περιβάλλοντος, είναι δραστήριοι και νιώθουν υπεύθυνοι για τη γνώση τους. Μαθαίνουν εξάλλου να δέχονται και να ασκούν κριτική, να αναγνωρίζουν λάθη και παραλείψεις, να αναθεωρούν αστήρικτες και ατεκμηρίωτες θέσεις έτσι που να οδηγούνται σε νοητική και συναισθηματική ωρίμανση.

Όσο αφορά στην ανάπτυξη του συμμετοχικού-κοινωνικού τομέα, οι μαθητές αποδέχονται και εκτιμούν τη συμβολή των άλλων στο θετικό αποτέλεσμα και στη βελτίωση των δικών τους δυνατοτήτων. Αποδέχονται την ιδιαιτερότητα των ανθρώπων με τους οποίους εργάζονται για κάποιο συγκεκριμένο σκοπό και αποκτούν δεξιότητες επικοινωνίας. Τέλος, «η ανάληψη ευθυνών και η εκτέλεση καθηκόντων συνεπάγεται την κατοχύρωση των δικαιωμάτων συμμετοχής, αποδοχής και συνυπευθυνότητας στην επιτυχία» (Κουτσελίνη και Θεοφιλίδης, 1998, σ. 119). Αυτό ενισχύεται και από τους Johnson (1989), που υπογραμμίζουν ότι η ικανότητα των μαθητών να εργάζονται συνεργατικά είναι το κλειδί στην οικοδόμηση σταθερών γάμων, οικογενειών, καριέρών και φιλιών.

Η εφαρμογή της μεθόδου της εργασίας σε ομάδες στην τάξη των μαθηματικών είναι πολλές φορές δύσκολη και αυτό γιατί δεν είναι αναγνωρισμένη από το υπάρχον σχολικό σύστημα ως ουσιαστική μέθοδος μάθησης. Η εφαρμογή της εξαρτάται από τη διάθεση του εκάστοτε εκπαιδευτικού να την εντάξει στη διαδικασία της μάθησης.

Έτσι, σαν πρώτο πρόβλημα αναφέρεται το χρονοβόρο της διαδικασίας. Αυτό το πρόβλημα δημιουργείται λόγω του ότι δεν υπάρχει συστηματική εφαρμογή της ΣΜ από την είσοδο των παιδιών στο δημοτικό σχολείο, ώστε στις μεγαλύτερες τάξεις να έχουν ήδη οι μαθητές τις απαραίτητες συνεργατικές δεξιότητες που θα τους επιτρέπουν να εργάζονται αξιοποιώντας πλήρως το χρόνο τους στο διδακτικό έργο και όχι στην εκμάθηση συνεργατικών δεξιοτήτων.

Συνεπάγεται φόρτο εργασίας για τον εκπαιδευτικό που θα την εφαρμόσει, γιατί πρέπει να ετοιμάζει κάθε μέρα τους στόχους κάθε ομάδας, καθώς και τους στόχους για κάθε μέλος της ομάδας.

Οι εκπαιδευτικοί που θα την εφαρμόζουν, χρειάζονται αρχική επιμόρφωση και συνεχή υποστήριξη κατά τη διάρκεια της εφαρμογής της, είτε σε υλικά και μέσα είτε σε ενδοϋπηρεσιακή επιμόρφωση.

Δεν υπάρχει έτοιμο υλικό, βιβλία, υλικά, ή άλλα μέσα που να χρησιμεύουν σαν βάση για να κτίζουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

4. Μάθηση και διδασκαλία με τη βοήθεια του Η / Υ.

4.1 Μαθηματικά και διδασκαλία

Τα Μαθηματικά είναι ένα δημιούργημα του ανθρώπινου μυαλού, από έννοιες, διαδικασίες και αποδείξεις. Τα Μαθηματικά είναι κάτι πολύ περισσότερο από αριθμητική, αριθμούς και πράξεις. Είναι περισσότερο από άλγεβρα, τη γλώσσα των συμβόλων, από τύπους και αφηρημένες παραστάσεις. Είναι κάτι περισσότερο από τη μελέτη των σχημάτων και το μέγεθός τους, τη μελέτη του χώρου. Είναι κάτι παραπάνω από τριγωνομετρικούς αριθμούς, που μετρούν αποστάσεις στον ουρανό ή στη γη και αναλύουν ταλαντώσεις. Είναι πιο πολύ από στατιστική, από επιστήμη των γραφικών παραστάσεων. Παραπάνω από τη μελέτη των αλλαγών, του απείρου και των ορίων.

Πριν από όλα, τα Μαθηματικά είναι ο **τρόπος του *σκέπτεσθαι,*** είναι ο τρόπος του ***οργανώνειν* μια λογική διαδικασία απόδειξης,** από την οποία μπορεί να καθοριστεί πότε μια ιδέα, ένας συλλογισμός είναι αληθινός ή τουλάχιστον πόσο είναι πιθανόν να είναι. Έτσι, ως διαδικασία λογικών συλλογισμών, τα Μαθηματικά, προκαλούν για πνευματικές ανησυχίες.

Για τον τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών και ιδιαίτερα στην κατώτερη και μέση βαθμίδα των σπουδών έχει γίνει και εξακολουθεί να γίνεται μεγάλη συζήτηση. Ο Polya προσπαθώντας να την ορίσει, σημειώνει πως ***'η τέχνη της διδασκαλίας προϋποθέτει την ικανότητα παιξίματος ενός θεατρικού έργου, τις επαναλήψεις και την ποικιλία της μουσικής, την κομψότητα της ποίησης και την αυθεντικότητα ενός πίνακα ζωγραφικής'.*** Δεν είναι λοιπόν μια απλή τεχνική ή ακόμα χειρότερα η ευθύγραμμη μεταφορά γνώσεων από τον 'παντογνώστη' δάσκαλο στον παθητικό, ανυποψίαστο μαθητή.

Ειδικότερα ένας καθηγητής Μαθηματικών, σύμφωνα με αυτήν την αντίληψη, πέρα από το να γνωρίζει το αντικείμενο του και να αγαπά τη δουλεία του, πρέπει να μπορεί να κινητοποιεί τους μαθητές του αναγνωρίζοντάς τους ενεργητικό ρόλο στην όλη διαδικασία της διδασκαλίας. Να τους οδηγεί να ανακαλύπτουν ιδέες και μαθηματικές έννοιες. Ακόμα να αναπτύσσει την ικανότητά τους να καταλαβαίνουν, να υπολογίζουν με ακρίβεια, αποτελεσματικά. Γιατί η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν πρέπει να περιλαμβάνει μόνο εκπαίδευση σε υπολογισμούς και τεχνικές. Περιλαμβάνει κυρίως την ανάλυση προβλημάτων, την απόδειξη θεωρημάτων ή προτάσεων και ισχυρισμών, στην γενίκευση αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων.

Στην παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε να τεκμηριώσουμε πως ο Η/Υ αποτελεί ένα ιδιαίτερα αξιόλογο διδακτικό μέσο. Προσαρμόζεται στις ιδιαιτερότητες του κάθε μαθητή, παρακινεί τα παιδιά να ανακαλύψουν τη γνώση, συμβάλλει άμεσα στην ταχύτερη επίλυση των προβλημάτων και κάνει το μάθημα των Μαθηματικών πιο διασκεδαστικό, πιο ευχάριστο και πιο ενδιαφέρον. Η χρήση του θα πρέπει, όμως, να γίνεται μέσα σε λογικά πλαίσια, τα οποία δεν θα επιτρέπουν την αλλοίωση του παιδαγωγικού σκοπού της εκπαίδευσης. Ο Η/Υ δεν πρέπει με κανέναν τρόπο να αντικαταστήσει τον καθηγητή. Για να υπάρχει ωφέλεια και αποτελεσματικότητα

απαιτείται και η συμβολή του διδάσκοντα. Ο Η/Υ αποτελεί απλά ένα εργαλείο, ένα μέσο που μπορεί να βελτιώσει τη μαθησιακή διαδικασία. Ο καθηγητής είναι το μόνο πρόσωπο, που μπορεί να κάνει αυτή τη διαδικασία βιωματική και πλήρη, όχι μόνο από γνώσεις και εμπειρίες, αλλά και από συναισθήματα και ψυχική ολοκλήρωση.

4.2 Ο Υπολογιστής στη διδασκαλία.

Τα εποπτικά μέσα διδασκαλίας έχουν αυξηθεί δραματικά τα τελευταία χρόνια. Ο καθηγητής έχει σήμερα στη διάθεσή του μηχανήματα προβολής διαφανειών, οθόνες, video, τηλεοράσεις, φωτοτυπικά μηχανήματα κ.λ.π. Η εποχή της κιμωλίας και των ξύλινων γεωμετρικών οργάνων σαν τα μόνα εποπτικά μέσα διδασκαλίας φαίνεται να έχει περάσει ανεπιστρεπτί. Ο δάσκαλος έχει λοιπόν στη διάθεσή του μηχανήματα με πολύ μεγάλες δυνατότητες. Έχει ακόμα και τεράστιο όγκο πληροφοριών-γνώσεων. Όμως τίθεται το ερώτημα αν είναι σε θέση, αν έχει τις γνώσεις να τα χρησιμοποιήσει σωστά, προς όφελος των μαθητών. Γιατί τα πάντα εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο αυτά τα μέσα χρησιμοποιούνται. Από την επιλογή των πληροφοριών που θα γίνει ώστε να μην 'καταναλωθούν' αυτές άκριτα, να χρησιμοποιηθούν δηλαδή δημιουργικά.

Οι Υπολογιστές, χωρίς αμφιβολία, είναι ένα όργανο με πολλαπλές δυνατότητες χρήσης μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας. Έτσι θα πρέπει να είμαστε σε θέση να αποφασίζουμε, ή τουλάχιστον να αρχίσουμε να συζητάμε ποια από όλες τις χρήσεις είναι πιο κατάλληλη για τους μαθητές. Είναι φανερό πως όσα περισσότερα ξέρουμε για τον τρόπο που μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι Υπολογιστές, τόσο καλύτερη και αποδοτικότερη χρήση θα κάνουμε.

Έχει ειπωθεί πως τα μεγάλα πλεονεκτήματα που έχουν πράγματι οι υπολογιστές δεν μπορούμε να τα καρπωθούμε αυτόματα. Ή σύμφωνα με τον Douglas Sloan, καθηγητή στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, «*αν γίνουμε κριτικοί και ανήσυχοι για τη χρήση των υπολογιστών στην εκπαίδευση, μπορούμε να κάνουμε το αναγκαίο πρώτο βήμα να εκμεταλλευτούμε πλήρως τις ικανότητες των υπολογιστών*».

Με άλλα λόγια αν δεν ψάξει κανείς τις δυνατότητες και τη χρήση των υπολογιστών στη διδασκαλία, κινδυνεύει να γίνει παθητικός καταναλωτής του εξοπλισμού που είναι διαθέσιμος. Αυτή η μοναδική πολλές φορές καταναλωτική σχέση που διαμορφώνεται, όχι βέβαια άμοιρη άλλων κοινωνικών αξιών και αντιλήψεων, είναι ίσως και ο λόγος για την ύπαρξη εξαιρετικά φτωχών εφαρμογών που κυκλοφορούν στο εμπόριο.

Σύμφωνα με τους J. R. Dennis και R. J. Kansky η χρήση των υπολογιστών σαν μέσο στη διδασκαλία, έχει τρεις σπουδαίες εφαρμογές :

1. ο Υπολογιστής σαν *'δάσκαλος'*,
2. ο Υπολογιστής σαν *'συνεργάτης'*,
3. ο Υπολογιστής σαν *'επιτελικός βοηθός'*.

Στην εργασία αυτή οι χρήσεις των Υπολογιστών που θα προταθούν, θα είναι αυτές του *'συνεργάτη'* και του *'επιτελικού βοηθού'* κάτω βέβαια από τον έλεγχο ενός καθηγητή που θα γνωρίζει και επομένως θα μπορεί να αποφασίζει. Αυτό που θα μας

απασχολήσει είναι πώς πρέπει να ορίσουμε παιδαγωγικά κριτήρια και προτεραιότητες ώστε η χρήση των Υπολογιστών να γίνει αληθινά αποδοτική και ωφέλιμη στην εκπαίδευση των μαθητών.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην παρουσίαση περιβαλλόντων μάθησης μέσω υπολογιστή καθώς και πριν την ανάπτυξη μιας πρότασης διδασκαλίας με τον υπολογιστή ως εργαλείο μάθησης, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιάσουμε ορισμένες αρχές που πρέπει να διέπουν την όποια επιλογή κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, οι οποίες σύμφωνα με τους Johnson & Rising είναι:

1. Μία από της γενικές βασικές αρχές που πρέπει να ακολουθεί ένας καλός δάσκαλος είναι, ως γνωστόν, η ικανότητά του να εκπλήσσει τους μαθητές του χρησιμοποιώντας πραγματικά προβλήματα ή άλλους τρόπους προκειμένου να παρουσιάσει μαθηματικές έννοιες που δεν είναι αυτονόητες και προφανείς για αυτούς. Η αρχή αυτή πρέπει να ακολουθείται και στην περίπτωση που αποφασίζει κανείς να διδάξει κάνοντας χρήση Υπολογιστών.
2. Η διδασκαλία των Μαθηματικών και εν γένει η διδασκαλία, δεν είναι μια απλή διαδικασία. Έτσι, χρησιμοποιώντας ένα τόσο πολύπλοκο εργαλείο, όπως είναι ένας Υπολογιστής μέχρι σήμερα, είναι σίγουρο πως τα Μαθηματικά σε αρκετές περιπτώσεις θα γίνουν ακόμα δυσκολότερα. Επομένως, η χρήση Υπολογιστών πρέπει να γίνει σε εκείνες μόνο τις περιπτώσεις στις οποίες η παρουσίαση Μαθηματικών εννοιών θα διευκολυνθεί.
3. Η ύπαρξη ενός νέου εποπτικού μέσου διδασκαλίας δεν μπορεί να θεωρηθεί πανάκεια που θα λύσει όλα τα προβλήματα δια μαγείας, τα οποία ομολογουμένως ταλανίζουν το εκπαιδευτικό μας σύστημα και τους μαθητές.
4. Ένας καθηγητής Μαθηματικών πρέπει να ξέρει σε ποιες περιπτώσεις η χρήση Υπολογιστών στη διδασκαλία είναι κατάλληλη και σε ποιες δεν είναι. Κατά αυτόν τον τρόπο η χρήση τους δεν είναι παντού υποχρεωτική, μόνο και μόνο γιατί έχει κανείς στη διάθεσή του και Υπολογιστές.

4.3 Περιβάλλοντα μάθησης μέσω Η/Υ

Αρκετοί ερευνητές της μαθηματικής παιδείας συμφωνούν σε ένα κοινό όραμα που αναφέρεται στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών. Στο πλαίσιο γίνεται αποδεκτό ότι οι μαθητές αναπτύσσουν ευκολότερα μαθηματικό νόημα μέσα από ποσοτικά και ποιοτικά μοντέλα, που βασίζονται στη χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας, για να διερευνούν και να αναλύουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες (Hoyles, Noss & Pozzi, 2001; Kaput, 1999; diSessa, 2000).

Οι σύγχρονες τεχνολογίες προσφέρουν στους μαθητές δυνατότητες για μάθηση μέσα από ένα παιγνιώδη τρόπο. Μπορούν ταυτόχρονα να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν ανώτερη μαθηματική σκέψη (NCTM, 2000), αφού τους παρέχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν, να κάνουν εικασίες, να αναπτύξουν την ικανότητα της αιτιολόγησης και να κάνουν γενικεύσεις (Papert, 1996). Οι νέες τεχνολογίες δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να καλλιεργήσουν τη φαντασία τους, τη συνεργασία με άλλους μαθητές και εκπαιδευτικούς, χωρίς ωστόσο, να αποκλείουν

την ευγενή άμιλλα (Hoyles & Noss, 1996). Φυσικά, αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτό το νέο περιβάλλον οι μαθητές συνήθως καλούνται να εργαστούν σε ένα έτοιμο περιβάλλον, να χειριστούν διατάξεις και κατασκευές, που έχουν σχεδιαστεί από άλλους, με αποτέλεσμα η ανάληψη χειριστικού μόνο ρόλου να περιορίζει τη δυνατότητά τους να εμβαθύνουν στον τρόπο λειτουργίας των κατασκευών (Noss et al., 1997).

Το ενδιαφέρον εστιάζεται στους νέους τρόπους έκφρασης και καθορισμού των μαθηματικών σχέσεων μεταξύ των διαφόρων αντικειμένων του περιβάλλοντος. Στο πλαίσιο αυτό, η καινοτομία του προγράμματος έγκειται στη χρησιμοποίηση του προγραμματισμού, ο οποίος έχει παρουσιάσει μια εξέλιξη από το γραπτό κώδικα, στον οπτικό κώδικα και στον κινούμενο κώδικα, όπως συμβαίνει με λογισμικά γλώσσας προγραμματισμού Logo, (Noss et al., 1997; Papert, 1996), το Function Probe, ο σχεδιασμός του οποίου έχει βασιστεί στις παρατηρούμενες ενέργειες των μαθητών όταν επιλύουν προβλήματα (Confrey & Smith, 1988), το οποίο και θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία.

Η ανάπτυξη κατάλληλων διδακτικών δραστηριοτήτων σε ένα ενεργητικό διερευνητικό περιβάλλον μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κινηθούν από τον επαγωγικό χαρακτήρα του λογισμικού στον παραγωγικό χαρακτήρα της διαδικασίας της μαθηματικής απόδειξης, με την κατάλληλη αξιοποίηση των εργαλείων προγραμματισμού και τη δυνατότητα για διερεύνηση, επιβεβαίωση και επαλήθευση για μετάβαση στην τυπική μαθηματική απόδειξη (Noss et al., 1997).
Κάποια τέτοια περιβάλλοντα θα μπορούσαμε να τα ταξινομήσουμε σε τρεις τύπους :

- **Μικρόκοσμοι** (microworlds) που αποτελούνται από αντικείμενα σχέσεις μεταξύ αντικειμένων και λειτουργίες που μπορούν να εφαρμοσθούν στα αντικείμενα με στόχο να μεταβάλλουν τις σχέσεις μεταξύ τους ή να δημιουργήσουν νέα αντικείμενα. Με τον όρο 'μικρόκοσμος' προσδιορίζουμε τα υπολογιστικά περιβάλλοντα τα οποία ενσωματώνουν συγκεκριμένες έννοιες ενός γνωστικού αντικειμένου υπό τη μορφή δυναμικών αναπαραστάσεων (Edwards, 1995).Είναι ένα δομημένο περιβάλλον που επιτρέπει στο μαθητή να εξερευνήσει και να χειριστεί έναν 'κόσμο' που ελέγχεται από κανόνες, υπόκεινται σε συγκεκριμένα αξιώματα και περιορισμούς και χρησιμοποιείται ως μια αναλογική αναπαράσταση ενός πραγματικού περιβάλλοντος.

  Τα εργαλεία και οι δομές που αποτελούν ένα μικρόκοσμο είναι ελεύθερα για αναθεώρηση και βελτίωση. Με αυτή την έννοια, οι μαθητές έχουν άμεσο έλεγχο και μπορούν να καθορίσουν τη λειτουργία του μικρόκοσμου. Για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα υφιστάμενα εργαλεία, με ή χωρίς τροποποιήσεις, ή ακόμη και να κατασκευάσουν τα δικά τους εργαλεία που θα εξυπηρετούν καλύτερα τις ανάγκες τους. Αυτός ο διττός ρόλος των μαθητών, ως χρηστών και ως κατασκευαστών εργαλείων του μικρόκοσμου, παραπέμπει άμεσα στην ιδέα του οικοδομισμού και της αποτελεσματικής μάθησης. Σύμφωνα με τον Papert (1991), η αποτελεσματική μάθηση επιτυγχάνεται, όχι με την παροχή στον εκπαιδευτικό καλύτερων μεθόδων διδασκαλίας, αλλά με την παροχή στους μαθητές καλύτερων δυνατοτήτων να οικοδομήσουν τις γνώσεις τους.

- **Σχεδιασμένα μαθητοκεντρικά** (Student centered designed), όπως είναι το Function Probe, τα οποία είναι άμεσα προσαρμοσμένα στις γνωστικές ανάγκες των μαθητών και πιο συγκεκριμένα είναι σχεδιασμένα σύμφωνα με τις ενέργειες και τις αναπαραστάσεις που δημιουργούν οι μαθητές σε μια ποικιλία προβληματικών καταστάσεων που αντιμετωπίζουν όταν μελετούν μαθηματικά.

- **"Off the hook" λογισμικά** όπως είναι τα Computer Algebra Systems (CAS), το Mathematica ή το Maple. Τα λογισμικά αυτά δημιουργήθηκαν με στόχο να κωδικοποιήσουν γενικές μαθηματικές γνώσεις όπως στοιχειώδη άλγεβρα, ανάλυση, γραμμική άλγεβρα και διαφορικές εξισώσεις σε ένα σύστημα υπολογιστή για να χρησιμοποιηθούν όχι μόνο από μαθηματικούς αλλά και από μηχανικούς, φυσικούς, πληροφορικούς και άλλους επιστήμονες αλλά τελικά επεκτάθηκαν σε ένα εργαλείο για να κάνεις και να μαθαίνεις μαθηματικά. Συνδυάζουν συμβολική διαχείριση δεδομένων, υπολογιστικά μαθηματικά, γραφικά μεγάλων δυνατοτήτων και είναι εξοπλισμένα με μια ιδιαίτερα ευέλικτη γλώσσα προγραμματισμού. Οι υπολογισμοί γίνονται αυτόματα και αυτό για τους υποστηρικτές τους 'ελευθερώνει τον άνθρωπο προς υψηλότερες επιδιώξεις'. Στην ίδια κατηγορία ανήκουν και τα στατιστικά πακέτα, όπως το Statgraphics και το λογιστικά φύλλα, όπως το Excel.

4.4 Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές και Συνεργατική Μάθηση

Μελετώντας και αναλύοντας τη ΣΜ αντιλαμβάνεται κανείς πόσο πολύ ταιριάζει σε αυτήν η χρήση του Η/Υ. Οι πολλές δυνατότητες του Η/Υ, και ειδικά η δυνατότητά του να συγκεντρώνει, να επεξεργάζεται, να ταξινομεί, να παρουσιάζει και να διακινεί πληροφορίες, τον καθιστούν μοναδικό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού. Τα θετικά αποτελέσματα της ΣΜ με τη χρήση Η/Υ επιβεβαιώθηκαν και από πολλές έρευνες.

Οι Johnson, Johnson and Stanne (1995) μετά από έρευνες πάνω στην ΣΜ με Η/Υ κατέληξε στα εξής συμπεράσματα:

- Η υποβοηθούμενη από Η/Υ ΣΜ προάγει ψηλότερη ποσότητα και ποιότητα καθημερινής επίτευξης, μεγαλύτερη ικανότητα τεκμηριωμένης μάθησης καθώς και καλύτερη ικανότητα να χρησιμοποιούν οι μαθητές τις γνώσεις τους στην επίλυση προβλημάτων.
- Οι συζητήσεις ήταν περισσότερο επί του θέματος.
- Οι συνεργατικές ομάδες παρουσιάστηκαν πιο γρήγορες και ακριβείς από τις ατομικιστικές και ανταγωνιστικές ομάδες.
- Οι μαθητές χρειάζονταν λιγότερη βοήθεια από τον δάσκαλο.

Την ίδια άποψη περί πλεονεκτημάτων της συνδυασμένης χρήσης ΣΜ με Η/Υ συμμερίζονται και άλλοι ερευνητές.

- Ο Webb (1984) βρήκε ότι η εργασία με Η/Υ «αποδείχτηκε ένα ιδανικό σκηνικό για την προαγωγή της συνεργασίας μέσα στην ομάδα και την αποτροπή του διαμοιρασμού της εργασίας»
- Ο Fisher (1984) δηλώνει ότι ο υπολογιστής «φέρεται να διευκολύνει μια μοναδική αλληλεπίδραση μεταξύ των συμμαθητών, τοποθετώντας τους μαθητές

σε ένα πιο συνεργατικό περιβάλλον καθώς δουλεύουν μαζί να λύσουν τα προβλήματα που θέτονται στον υπολογιστή»

- Οι Okey and Mayer (1976) βρήκαν ότι η επίτευξη και η συμπεριφορά ήταν περίπου ίδιες, είτε έκαναν χρήση η όχι των Η/Υ, αλλά η απόδοση (επίτευξη διαιρούμενη με τον κατά μαθητή χρόνο χρήσης του ΗΥ) ήταν αυξημένη όταν γινόταν χρήση υπολογιστή»
- Οι Mevarech, Stern, and Levita (1987) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι μαθητές που δούλευαν σε ζευγάρια στον Η/Υ «βελτίωσαν τον κοινωνικό προσανατολισμό ως προς το ζευγάρι τους, αλλά όχι προς τα άλλα μέλη της τάξης, δεικνύοντας δυνατότητα χρήσης ομαδοποίησης σε υπολογιστές για την βελτίωση φιλιών».

Ο συνδυασμός του Η/Υ με τη συνεργατική μάθηση στη διδακτική πράξη, όπως ήδη αναφέρθηκε, αυξάνει ακόμη περισσότερο τα θετικά αποτελέσματα της ΣΜ, αν χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά. Μπορούν και τα δυο μέσα να χρησιμοποιηθούν άνετα σχεδόν σε όλα τα θέματα του αναλυτικού προγράμματος, αφού, όσον αφορά τους Η/Υ, υπάρχει τώρα λογισμικό σχεδόν για κάθε μάθημα του αναλυτικού. Εκείνο που χρειάζεται είναι να παρέχονται στους μαθητές ευκαιρίες για συνεργασία στην εργασία τους με οποιοδήποτε λογισμικό.

Ένας από τους βασικούς στόχους της εκπαίδευσης είναι η καλλιέργεια ανώτερων νοητικών λειτουργιών που επιτυγχάνεται και μέσα από τη λύση προβλήματος και τη διερεύνηση. Ο Η/Υ μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά προς αυτή την κατεύθυνση, με προγράμματα τύπου Logo. Οι μαθητές της ομάδας τίθενται μπροστά σε μια προβληματική κατάσταση, είτε αυτή είναι γεωμετρικό πρόβλημα, είτε η ανάπτυξη ενός προγράμματος για την επίλυση εξισώσεων, ή οτιδήποτε άλλο. Προσπαθούν να εντοπίσουν τις διαστάσεις του προβλήματος, συζητούν στην ομάδα τους, καταγράφουν τις λύσεις που εισηγούνται, εισηγούνται εναλλακτικές λύσεις, προχωρούν στην ετοιμασία του προγράμματος που θα δώσει τη λύση. Αν το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, έχουν τη δυνατότητα να επανέλθουν, να εντοπίσουν το λάθος, να ξαναδοκιμάσουν, ώσπου να φτάσουν στη λύση. Τέτοιου είδους προβληματικές καταστάσεις δε ζητούν από τους μαθητές να ανακαλέσουν απλώς κάποιες γνώσεις, αλλά να αναλύσουν καταστάσεις, να συνθέσουν, να αξιολογήσουν αυτό που έκαναν. Όλες αυτές οι ενέργειες είναι ανώτερες νοητικές λειτουργίες(Papert, 1980).

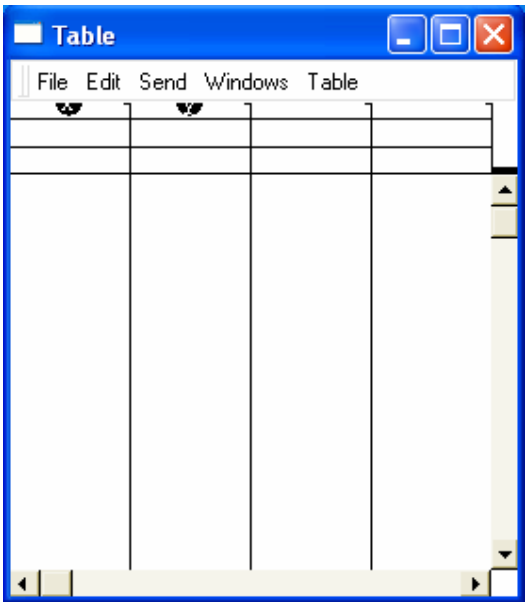
Στην επόμενη ενότητα γίνεται προσπάθεια να παρουσιαστεί η οργάνωση ενός μαθήματος που αφορά στη **χρήση του υπολογιστή ως εργαλείο** για τη διεκπεραίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών και συγκεκριμένα εννοιών σχετικών με την εκθετική συνάρτηση με τη βοήθεια λογισμικού πολλαπλών αναπαραστάσεων, του Function Probe και με τη χρήση συνεργατικής μάθησης, πράγμα που δεν εμφανίζεται συχνά στη βιβλιογραφία.

4.5 Χρήση εργαλείου πολλαπλών αναπαραστάσεων : Function Probe

Το Function Probe ανήκει στην κατηγορία των λογισμικών πολλαπλών αναπαραστάσεων και χρησιμοποιείται για τη μελέτη και διερεύνηση των συναρτήσεων. Η φιλοσοφία του βασίζεται σε αυτό που καλούμε «μαθητοκεντρικός σχεδιασμός» (student centered design), δηλαδή ο σχεδιασμός που έχει βασιστεί στις παρατηρούμενες ενέργειες των μαθητών όταν επιλύουν προβλήματα (Confrey & Smith, 1988). Το λογισμικό συνθέτουν τρία διαφορετικά παράθυρα που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, ενώ δίνεται συγχρόνως η δυνατότητα αποστολής δεδομένων από το ένα στο άλλο. Με τον τρόπο αυτό γίνεται δυνατή η εύκολη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης (συμβολική, γραφική, πίνακας τιμών) της συνάρτησης στην άλλη. Συγκεκριμένα:

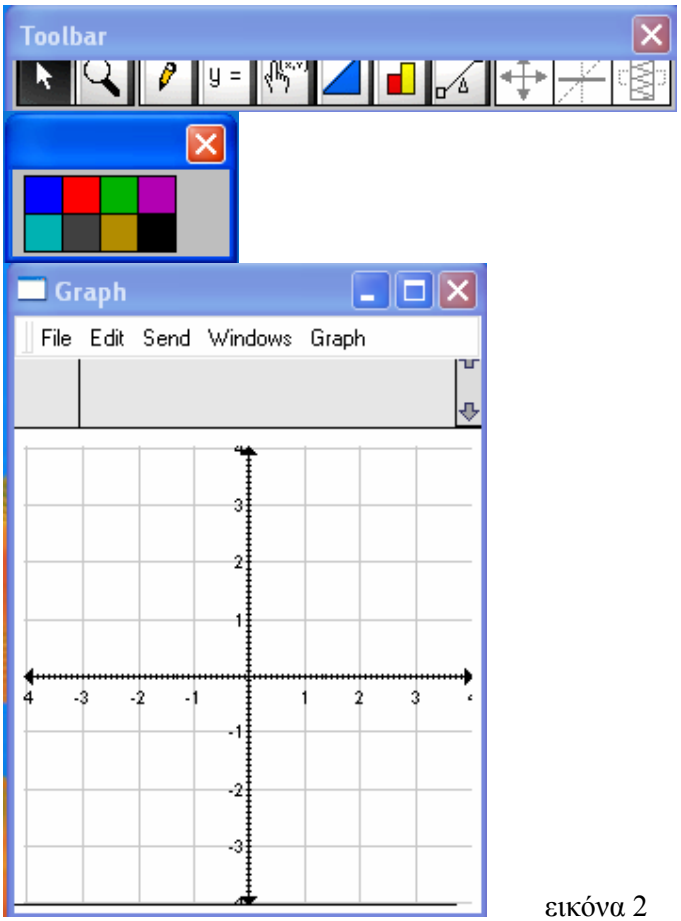
Το **παράθυρο «Πίνακας»** (εικόνα 1) έχει τη μορφή πίνακα τιμών που επιτρέπει τη δημιουργία και τη διαχείριση δεδομένων ως στήλες τιμών ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών. Ο πίνακας διατηρεί /διαχειρίζεται οντότητες με τη μορφή στηλών και υποστηρίζει την ύπαρξη και διαχείριση υπολογιζόμενων κελιών και στηλών. Με τον όρο «υπολογιζόμενο κελί» εννοείται το κελί του οποίου το περιεχόμενο είναι τιμή συνάρτησης. Τα υπολογιζόμενα κελιά δεν επιτρέπουν επεξεργασία, με την έννοια ότι ο χρήστης δεν μπορεί να παρέμβει και να αλλάξει τις τιμές τους – η μόνη παρέμβαση που επιτρέπεται είναι η αλλαγή του τύπου της συνάρτησης, βάση του οποίου υπολογίστηκαν. Οι στήλες μπορούν να συμπληρωθούν, να ταξινομηθούν και να συνδεθούν μεταξύ τους.

Η συμπλήρωση στήλης ανεξάρτητης μεταβλητής μπορεί να γίνει ή με άμεση καταχώρηση αριθμητικών δεδομένων ή με τη δημιουργία σχέσεων μεταξύ των καταχωρίσεων. Είναι επίσης δυνατή η παρεμβολή αριθμητικών δεδομένων μεταξύ δύο διαδοχικών καταχωρήσεων. Η συμπλήρωση στηλών εξαρτημένων μεταβλητών γίνεται αυτόματα μετά την πληκτρολόγηση του τύπου της συνάρτησης. Από το παράθυρο αυτό μπορούμε να στείλουμε σημεία (την τετμημένη και την τεταγμένη) στο παράθυρο «Γράφημα».



εικόνα 1

Το παράθυρο «Γράφημα» (εικόνα 2), στο οποίο έχουμε τη δυνατότητα να εισάγουμε μία ή περισσότερες συναρτήσεις αλγεβρικά και να μας εμφανίσει τις γραφικές παραστάσεις τους. Επίσης μπορούμε να σχεδιάσουμε σημεία και να κρατάμε ένα ιστορικό από όλες τις σχεδιαστικές ενέργειες που έχουμε κάνει, ανεξάρτητα από αυτές που βλέπουμε στην ψηφίδα. Για διδακτικούς λόγους ζητείται από τον μαθητή να κάνει ο ίδιος την αλλαγή της κλίμακας προσδιορίζοντας ο ίδιος τα διαστήματα του πεδίου ορισμού, του πεδίου τιμών και τις μονάδες αρίθμησης της κλίμακας. Σε περίπτωση που ο καθορισμός της κλίμακας δεν είναι υλοποιήσιμος, στην οθόνη εμφανίζεται σχετικό μήνυμα. Μπορούμε να εκτελέσουμε μεταφορές, στρέψεις και ελαστικούς χειρισμούς με άμεσο χειρισμό (με το ποντίκι) της γραφικής παράστασης, ενώ παράλληλα εμφανίζεται και η επίδραση του χειρισμού στον τύπο της συνάρτησης. Το παράθυρο αυτό επικοινωνεί με το παράθυρο «Πίνακας» και με το παράθυρο «Αριθμομηχανή».



εικόνα 2

Το **παράθυρο «Αριθμομηχανή»** (εικόνα 3)**,** αν και θυμίζει το γνωστό επιστημονικό κομπιουτεράκι, περιέχει και τη λειτουργία του ορισμού (κατασκευής) πλήκτρου για μία διαδικασία. Έχουμε, δηλαδή, τη δυνατότητα αναπαράστασης μιας διαδικασίας με πλήκτρο. Με αυτό τον τρόπο ενθαρρύνονται οι μαθητές να δουν τη συνάρτηση ως τη γενίκευση μιας διαδικασίας. Και από αυτό το παράθυρο παρέχεται η δυνατότητα επικοινωνίας με τα άλλα δύο παράθυρα του λογισμικού.

εικόνα 3

Σύμφωνα με τους Jere Confrey & Alan Maloney η ιδέα της επικοινωνίας ανάμεσα σε μαθηματικές αναπαραστάσεις με χρήση των παραθύρων του Function Probe (FP) παρέχει σε μαθητές και καθηγητές ένα δυναμικό μέσο συντονισμού πολλαπλών αναπαραστάσεων, πολύ χρήσιμο στις προσπάθειές τους να επιλύουν προβλήματα.

Για τους μαθητές:
Το FP περιλαμβάνει πολλά ειδικά στοιχεία. Οι μαθητές μπορούν:

- Να ξεκινήσουν να μαθαίνουν με έναν ποιοτικό τρόπο για τις γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων
- Να κατασκευάζουν πίνακες με τιμές και να ερευνούν τις συσχετίσεις ανάμεσα σε αυτές τις τιμές
- Να μετασχηματίζουν δυναμικά και εποπτικά τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και να δουν άμεσα την επίδραση των μετασχηματισμών στον τύπο της συνάρτησης
- Να πραγματοποιούν απλή γραμμική ανάλυση παλινδρόμησης σε σύνολα δεδομένων
- Να χρησιμοποιούν καρτεσιανό, λογαριθμικό ή πολικό σύστημα συντεταγμένων στις κλίμακες των γραφημάτων
- Να δουλεύουν με παραμετρικούς τύπους
- Να «στέλνουν» σημεία από έναν πίνακα δεδομένων σε ένα παράθυρο γραφήματος
- Να διερευνούν μορφές συναρτήσεων σε ένα γράφημα χρησιμοποιώντας σημεία, ράβδους ή ευθείες κλίσης και να «στέλνουν» το δείγμα στον πίνακα δεδομένων

- Να «καλέσουν» μια συνάρτηση που έχει οριστεί σε ένα παράθυρο από ένα άλλο παράθυρο
- Να κατασκευάσουν κουμπιά στην αριθμομηχανή για να εκτελούν υπολογισμούς που επαναλαμβάνονται συχνά

Για τον εκπαιδευτικό:

Το FP είναι προορισμένο να χρησιμοποιείται σε μαθήματα άλγεβρας, τριγωνομετρίας και ανάλυσης (πριν το διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό) σε τάξεις του γυμνασίου και του λυκείου. Αποτελεί ένα ευέλικτο και δυναμικό εργαλείο, σχεδιασμένο έτσι ώστε να είναι εξίσου εύκολο στην εκμάθηση και τη χρήση. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να συμμετέχουν ενεργά στη χρήση του προγράμματος κατά τη διάρκεια της προσπάθειας που καταβάλλουν στην επίλυση προβλημάτων. Οι καθηγητές θα έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν το FP για να επιδεικνύουν τεχνικές επίλυσης προβλημάτων και για να καθοδηγούν συζητήσεις μέσα στην τάξη. Το FP δεν είναι αυστηρά συνδεδεμένο με συγκεκριμένο διδακτικό υλικό. Αντίθετα, είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε να είναι συμβατό με ενέργειες και αναπαραστάσεις που οι μαθητές δημιουργούν και χρησιμοποιούν σε μια ποικιλία προβλημάτων τα οποία συναντούν κατά τη μελέτη των Μαθηματικών.

Η ανάπτυξη του FP είναι το αποτέλεσμα ετών σχεδιασμού και δοκιμής, επανασχεδιασμού και εκ νέου δοκιμής. Καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας μας οδηγούσαν τρεις βασικές πεποιθήσεις για τα Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση(Jere Confrey & Alan Maloney,1999):

- Η διδακτέα ύλη πρέπει να καθοδηγείται από ανάλογα προβλήματα.
- Γινόμαστε καλύτεροι καθηγητές αναζητώντας και ακούγοντας τις μεθόδους που αναπτύσσουν οι μαθητές για να επιλύσουν τα προβλήματα.
- Το να μαθαίνεις να συνδυάζεις και να δουλεύεις με πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι ένα σημαντικό κομμάτι της διαδικασίας ανάπτυξης δυνατών και βιώσιμων μαθηματικών ιδεών.

Τις πεποιθήσεις αυτές έρχεται να υπογραμμίσει το γεγονός ότι πιστεύουμε πως τα Μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη προσπάθεια. Κάθε άνθρωπος αναπτύσσει τις μαθηματικές του ιδέες πραγματοποιώντας ενέργειες που επιλύουν καταστάσεις ¨προβληματισμού¨ της ζωής και σκεπτόμενος τη διαδικασία με την οποία αυτό συντελέστηκε. Ο συνδυασμός αυτός, της προσωπικής διαδικασίας της σκέψης με την κοινωνική διαδικασία της επικοινωνίας ιδεών με άλλους, είναι ένα ουσιώδες τμήμα της προσπάθειας να γίνει κανείς ένα ενεργό και παραγωγικό μέλος της κοινωνίας μας.

Εκπαιδευτικοί στόχοι

Μολονότι πολλοί μαθητές μπορούν να αποδώσουν ένα τυπικό ορισμό του τι είναι συνάρτηση και να εφαρμόσουν το τεστ της κάθετης ευθείας, ανακαλύπτουμε ότι αντιμετωπίζουν πολύ μεγαλύτερη δυσκολία στο να χρησιμοποιούν συναρτήσεις, δηλαδή να κατασκευάζουν συναρτήσεις, για να αναπαραστήσουν πραγματικές καταστάσεις.

Η προσέγγιση που ακολουθούμε δίνει έμφαση στα ακόλουθα σημεία:

- Στο να ενθαρρύνονται οι μαθητές να κατασκευάζουν σχέσεις βασισμένες σε καταστάσεις οι οποίες τους είναι οικείες και στων οποίων την 'προβληματική' έχουν ήδη πρόσβαση.

- Στο να χρησιμοποιούνται τα ‘λάθη’ των μαθητών για τη σταδιακή προσέγγιση της έννοιας των συναρτήσεων.
- Στο να μαθαίνουν οι μαθητές να ‘μεταφράζουν’ και να ‘ερμηνεύουν’ τις καθημερινές καταστάσεις με τη βοήθεια των μαθηματικών των συναρτήσεων.
- Στο να μαθαίνουν οι μαθητές να δουλεύουν με ‘συναρτήσεις-αρχέτυπα’ και να μετασχηματίζουν αυτές τις συναρτήσεις μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις.
- Στην προσπάθεια να βοηθηθούν οι μαθητές να συντονίζουν τις ενέργειές τους στις συναρτήσεις μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις, στις οποίες συμπεριλαμβάνονται οι γραπτές περιγραφές, οι εικόνες, η καταγραφή πληκτρολογήσεων στην αριθμομηχανή, καθώς επίσης και οι πιο συμβατικές μαθηματικές αναπαραστάσεις, όπως ο πίνακας, η γραφική παράσταση και οι τύποι.(Jere Confrey & Alan Maloney,1999)

4.6 Πλαίσιο σεναρίων για την παιδαγωγική αξιοποίηση των Νέων Τεχνολογιών

4.6.1 Γενικός σκοπός του πλαισίου.

Σύμφωνα με τον κ. Κυνηγό, με τον όρο ‘σενάριο’, αναφερόμαστε σε ένα σύνολο δραστηριοτήτων και διαδικασιών (διδακτικών, μαθησιακών και διοίκησης σε επίπεδο σχολικής τάξης και σχολείου) οι οποίες περιγράφουν την χρήση της υπολογιστικής τεχνολογίας στο σύνολό της μέσα στην σχολική πραγματικότητα. Έτσι λοιπόν η περιγραφή των δραστηριοτήτων δεν αναφέρεται μόνο στον σχεδιασμό εργαλείων και δραστηριοτήτων βασισμένων σε κάποιο επιλεγμένο λογισμικό η στην συνέργια δύο η περισσοτέρων λογισμικών. Αντίθετα το σενάριο αποτελεί μια εκ βαθέων διείσδυση στη διδακτική πρακτική. Μέσω αυτού, γίνεται ανάλυση της μεθόδου και της στρατηγικής σύμφωνα με την οποία προτείνουμε να εφαρμοστεί το σύνολο των σχεδιασμένων δραστηριοτήτων στην τάξη και στους προτεινόμενους ρόλους που καλούνται να παίξουν οι συμμετέχοντες (μαθητές, καθηγητές, επιμορφωτές και διοίκηση του σχολείου), αλλά και στη δομή της συνεργασίας μεταξύ διαφορετικών ομάδων (η τάξη σαν σύνολο, μικρές ομάδες μαθητών στην ίδια τάξη ή σε διαφορετικές τάξεις). Το σενάριο πρέπει να είναι σχεδιασμένο με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπει παρέμβαση και αλλαγή από μέρους του καθηγητή και δημιουργικής χρήσης του σεναρίου στην τάξη. Επίσης πρέπει να έχει την δυνατότητα επέκτασης ανάλογα με τον αριθμό των μαθητών και τάξεων που παίρνουν μέρος.

Σκοπός λοιπόν του παρόντος πλαισίου είναι να προταθεί η αναλυτική περιγραφή του σεναρίου ως ενός συνόλου δραστηριοτήτων που έχουν δυνατότητα εφαρμογής στην σχολική μονάδα. Επιπλέον, η συγγραφή των σεναρίων λαμβάνει υπόψιν τα κάτωθι:

- Την πολυπλοκότητα της παιδαγωγικής, διδακτικής και γνωστικής προσέγγισης της διδασκόμενης ενότητας μέσω χρήσης της συγκεκριμένης τεχνολογίας και του προτεινόμενου σεναρίου.
- Την εμπλοκή διαφόρων γνωστικών περιοχών και διαφορετικής φύσης παραγόντων στην εκμάθηση και διδασκαλία μιας διδακτικής ενότητας και την ανάγκη συνεργίας μεταξύ τους.

- Την ανάγκη συνεργασίας μεταξύ τεχνικών (ανθρώπων που έχουν εμπειρία στην δημιουργία και χρήση τεχνολογικών εργαλείων) και παιδαγωγών (ανθρώπων που έχουν εμπειρία στην διδακτική και μάθηση γνωστικών ενοτήτων) για την επιτυχή δημιουργία και συγγραφή ρεαλιστικών σεναρίων.
- Την άμεση ανταπόκριση των σεναρίων στην καθημερινή σχολική πραγματικότητα και την συμβολή τους στην αναβάθμιση της διδακτικής πρακτικής, της εξομάλυνσης δυσκολιών κατανόησης και της μαθησιακής επικοινωνίας.
- Την ανάγκη επικοινωνίας των σεναρίων (δραστηριότητες, εργασίες, ασκήσεις, μέθοδος εφαρμογής στην τάξη και στο σχολείο) με μαθητές, καθηγητές, διεύθυνση σχολείων και άλλων σχετικών φορέων.

Έτσι το παρόν πλαίσιο χωρίζεται σε συγκεκριμένες ενότητες, οι οποίες ξεκινούν από μια σύντομη περίληψη του σεναρίου και εν συνεχεία επιζητούν λεπτομερή ανάλυση θεμάτων όπως η επεξήγηση του γενικότερου παιδαγωγικού και κοινωνιολογικού χαρακτήρα του σεναρίου, ανάλυση των διαδικασιών μάθησης που προάγονται δια χρήσης του προτεινόμενου σεναρίου, ανάλυση της διδακτικής πρακτικής, ανάλυση των χαρακτηριστικών των τεχνολογικών εργαλείων, παράθεση παραδειγμάτων από ασκήσεις, προσέγγιση της εφαρμογής του σεναρίου στην τάξη και ειδικότερα στο αναλυτικό πρόγραμμα, και τέλος κριτική των θετικών και αρνητικών στοιχείων του σεναρίου.

Οι παραπάνω ενότητες δεν είναι ξένες μεταξύ τους. Στοιχεία της μιας εμπλέκονται με στοιχεία της άλλης, πράγμα που δείχνει την πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει την εφαρμογή μιας παιδαγωγικής και διδακτικής διαδικασίας. Και παρόλο που κάθε ενότητα αναφέρεται σε κάποιο συγκεκριμένο θέμα, η επικάλυψη είναι αναπόφευκτη αλλά και αναγκαία για τη καλύτερη ανάλυση και περιγραφή των επιμέρους φάσεων.

Η δομή και η σειρά των επιμέρους ενοτήτων (ξεκινώντας από το γενικότερο πλαίσιο της σχολικής μονάδας και προχωρώντας μετά στα ειδικότερα χαρακτηριστικά του λογισμικού) και που προτείνεται στο παρόν κείμενο έχει ως σκοπό να επισημάνει ότι η χρήση και ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων πρέπει να συμπεριλάβει την χρήση των ειδικών χαρακτηριστικών του λογισμικού για τη διδασκαλία μιας συγκεκριμένης γνωστικής περιοχής σε σχέση με τις ευρύτερες ανάγκες του σχολείου και της διδακτικής πρακτικής μιας σχολικής κοινότητας.

4.6.2 Σύντομη ανασκόπηση του σεναρίου

Εδώ γίνεται μία συνοπτική παρουσίαση του σεναρίου με σύντομη αναφορά στα παρακάτω:

- Στην ιδέα που διέπει το σενάριο
- Στα τεχνολογικά εργαλεία που προτείνονται προς χρήση (π.χ. λογισμικό)
- Στη χρήση συμπληρωματικού υλικού και εργαλείων
- Στις προσδοκώμενες παιδαγωγικές και μαθησιακές κατακτήσεις
- Στις προσδοκώμενες μεθόδους διδακτικής
- Στις στρατηγικές εφαρμογής

4.6.3 Παιδαγωγικοί, κοινωνιολογικοί και πολιτισμικοί στόχοι

Εδώ ζητείται αναλυτική περιγραφή των ευρύτερων χαρακτηριστικών του σεναρίου σε σχέση με την παιδαγωγική, κοινωνική και πολιτισμική επιρροή που έχει στην σχολική κοινότητα.

- Ο ρόλος του σεναρίου και των τεχνολογικών εργαλείων για την αναβάθμιση των συμμετεχόντων ή την ενίσχυση των ρόλων τους (καθηγητές, μαθητές, διεύθυνση, φορείς της κοινότητας)
- Ο ρόλος των προς χρήση εργαλείων (τεχνολογικών και άλλων) στο συγκεκριμένο σενάριο
- Αναφορά στα καινοτομικά στοιχεία του σεναρίου και των εργαλείων στη σχολική κοινότητα και στον αναμενόμενο ρόλο τους για τους συμμετέχοντες

4.6.4 Προσδοκώμενη διαδικασία μάθησης

Σε αυτή την ενότητα γίνεται αναλυτική περιγραφή του επιλεγόμενου γνωστικού αντικειμένου του οποίου η μάθηση προτείνεται μέσα από το συγκεκριμένο σενάριο καθώς και της συσχέτισής των δύο.

- Ορισμός της επιστημολογικής υπόστασης του εν λόγω γνωστικού αντικειμένου καθώς και των συγγενών του εννοιών
- Αναφορά στις μαθησιακές δυσκολίες των παιδιών οι οποίες έχουν εντοπισθεί μέσω ερευνητικών διαδικασιών για το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο
- Αναλυτική περιγραφή των αναμενόμενων και προσδοκώμενων μαθησιακών διαδικασιών που στοχεύεται να εμπλακούν με την χρήση του σεναρίου και της σχέσης τους με τις προαναφερθέντες μαθησιακές δυσκολίες

4.6.5 Διδακτική διαδικασία

Εδώ γίνεται η αναλυτική ανάπτυξη της διδακτικής διαδικασίας που απαιτείται για την επίτευξη των παραπάνω προσδοκώμενων μαθησιακών στόχων.

- Περιγραφή των διδακτικών μεθόδων που εμπλέκονται και απαιτούνται στα πλαίσια εφαρμογής του σεναρίου
- Ανάλυση του τρόπου εργασίας των μαθητών (μόνοι, σε ομάδες, καθ'εδρας) και του βαθμού αυτενέργειας και αυτονομίας που παρέχεται
- Αναφορά και επεξήγηση της τυχόν ανάγκης αλλαγής του ρόλου των καθηγητών και οι αντιλήψεις τους για την διδασκαλία του συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου μέσα από το προτεινόμενο σενάριο
- Αναφορά στην ανάγκη νέων συνεργασιών είτε μεταξύ των καθηγητών του ιδίου σχολείου, είτε μεταξύ καθηγητών άλλων σχολείων ή ακόμη και με άλλους φορείς της κοινότητας
- Τυχούσα χρήση αξιολόγησης και αναλυτική περιγραφή της ποιότητας, είδους και στόχων της

4.6.6 Τεχνολογικά εργαλεία

Ζητείται περιγραφή των τεχνολογικών εργαλείων και του τρόπου με τον οποίο αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το είδος της μαθησιακής διαδικασίας και διδακτικής παρέμβασης που προαναφέρθηκε.

- Ποια είναι τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά των τεχνολογικών εργαλείων και οι συνθήκες συνέργιας και αλληλεπίδρασης
- Ποιες οι δυνατότητες αυτών των εργαλείων σε διάφορες εφαρμογές και χρήσεις
- Ανάλυση του δυναμικού εφαρμογής αυτών των εργαλείων σε συγκεκριμένες χρήσεις εφαρμογής στο προτεινόμενο σενάριο με αναφορά στις διδακτικές μεθόδους που απαιτούνται ή προωθούνται μέσω χρήσης αυτών των εργαλείων
- Επεξήγηση των λόγων για τους οποίους η χρήση αυτών των εργαλείων βοηθάει στην διευθέτηση των δυσκολιών κατανόησης και εκμάθησης του συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου
- Σύγκριση αυτών των εργαλείων με άλλα παρομοίων δυνατοτήτων

4.6.7 Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα

Επιλογή και παρουσίαση αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων από το προτεινόμενο σενάριο όπως συγκεκριμένες ασκήσεις και εργασίες οι οποίες αναδεικνύουν και διασαφηνίζουν τα όσα ειπώθηκαν παραπάνω σχετικά με τα χαρακτηριστικά των προς χρήση εργαλείων, των προσδοκώμενων μαθησιακών στόχων και της απαιτούμενης διδακτικής παρέμβασης.

4.6.8 Εφαρμογή στη σχολική μονάδα

Εδώ γίνεται αναλυτική περιγραφή των φάσεων εφαρμογής του σεναρίου στο σχολείο και στην τάξη λαμβάνοντας υπόψη όλους τους πιθανούς παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν την ομαλή διεξαγωγή των προτεινόμενων διαδικασιών

- Προτεινόμενες θεματικές ενότητες και χρονισμός εφαρμογής τους (π.χ. διάρκεια μαθήματος, αριθμός μαθημάτων, συνεργασία με διδακτικές ώρες άλλων μαθημάτων)
- Σχέση του εύρους επισκόπησης του γνωστικού αντικειμένου μέσα στο προτεινόμενο σενάριο με αυτό του αναλυτικού προγράμματος που τυχόν διδάσκονται οι μαθητές και βαθμοί επιρροής στην σχολική κοινότητα
- Προσδιορισμός της θέσης των τυχόν νέων διδακτικών παρεμβάσεων, μαθησιακών διαδικασιών στην πρακτική εφαρμογής του σεναρίου και βαθμός επιρροής τους στους συμμετέχοντες μαθητές και καθηγητές
- Επιρροή του προτεινόμενου σεναρίου στην διεύθυνση/διοίκηση του σχολείου και σχετικά μέτρα που πρέπει να ληφθούν
- Πιθανός διευκολυντικός ρόλος του Υπουργείου, Διεύθυνσης Β’βάθμιας εκπαίδευσης, ΠΛΗΝΕΤ, ΠΙ, ΙΤΥ ή άλλων σχετιζομένων φορέων
- Αναμενόμενο οικονομικό κόστος για το σχολείο και προτάσεις για ανεύρεση πόρων
- Ανάγκες επιμόρφωσης για τη χρήση των εργαλείων και του σεναρίου γενικότερα (αρχική και διαρκείας)

4.6.9 Κριτική προσέγγιση του σεναρίου και της εφαρμογής του

Ζητείται κριτική αναφορά στα χαρακτηριστικά του προτεινόμενου σεναρίου λαμβάνοντας υπόψη θετικά και αρνητικά στοιχεία σε σχέση με τις προαναφερόμενες ενότητες

- Τοποθέτηση του προτεινόμενου σεναρίου στο γενικότερο σύνολο διδακτικής της εν λόγω γνωστικής ενότητας (π.χ. αναφορά σε συγγενή ή διαφορετικά σενάρια)
- Περιγραφή των σημείων που μένουν αμετάβλητα καθώς και εκείνων που δέχονται περαιτέρω αλλαγές, επιπροσθέσεις και γενικότερα είναι περισσότερο ευλύγιστα για μετατροπές στα χέρια των καθηγητών και μαθητών τους
- Κριτική των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων του σεναρίου ως προς τις προσδοκούμενες διδακτικές και μαθησιακές διαδικασίες
- Αναφορά σε συγκεκριμένους στόχους ή διαδικασίες που δεν μπορούν να επιτευχθούν μέσω της συγκεκριμένης μορφής και εφαρμογής του σεναρίου

ΜΕΡΟΣ 2^{Ο}

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}

5. Σχεδιασμός της έρευνας

5.1 Αντικείμενο της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Η έρευνα που ακολουθεί περιλαμβάνει την υλοποίηση ενός εκπαιδευτικού σεναρίου με αντικείμενο το νόμο της εκθετικής μεταβολής. Το σενάριο αυτό ενέχει μια σειρά εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων με χρήση του λογισμικού Function Probe. Οι δραστηριότητες αυτές αναδεικνύουν τη δυναμική μιας πραγματικής κατάστασης και τη χρησιμότητα των παραγόμενων μαθηματικών εννοιών.

Το ενδιαφέρον μας εστιάστηκε στη μελέτη της πορείας της διεξαγωγής της εκπαιδευτικής δραστηριότητας σε πραγματικές σχολικές συνθήκες και στον εντοπισμό των κυριότερων παραγόντων, οι οποίοι επηρεάζουν τη διδακτική και τη μαθησιακή διαδικασία. Ειδικότερα το ενδιαφέρον μας εστιάστηκε:

1. στα επιμέρους χαρακτηριστικά της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας που αναπτύχθηκε κατά την εφαρμογή της δραστηριότητας και
2. στο ρόλο του λογισμικού στη μαθησιακή διαδικασία.

5.2 Μεθοδολογία Έρευνας

Η έρευνα στο σύνολό της, διεξήχθη κατά τη χρονική περίοδο Ιουνίου-Ιουλίου 2004, σε αυτήν έλαβαν μέρος μαθητές της Β Λυκείου. Πραγματοποιήθηκαν τρεις συναντήσεις, όσες και οι φάσεις στις οποίες χωρίζεται η δραστηριότητα και στην κάθε μία αφιερώθηκαν 3 διδακτικές ώρες. Οι συναντήσεις έγιναν σε φροντιστηριακό χώρο στην Αγία Παρασκευή Αττικής και χρησιμοποιήθηκαν φορητοί ηλεκτρονικοί υπολογιστές καθώς και ο μοναδικός ηλεκτρονικός υπολογιστής του φροντιστηρίου. Λόγω έλλειψης μηχανημάτων, στην έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά 12 μαθητές (αν και υπήρχε ενδιαφέρον συμμετοχής από πολλούς ακόμη), οι οποίοι χωρίστηκαν σε ομάδες των τριών ατόμων κατά τυχαίο τρόπο ανάλογα με τη διάθεση των μαθητών. Στόχος ήταν τα παιδία να νοιώσουν οικεία ώστε να ευνοείται η αλληλεπίδραση ανάμεσά τους και η ανάπτυξη του αισθήματος συμμετοχής τους σε ένα ομαδικό παιχνίδι. Δεν θέλαμε οι συναντήσεις που πραγματοποιήθηκαν να θυμίζουν μάθημα κατά τον παραδοσιακό τρόπο.

Η ερευνήτρια παρακολούθησε την εξέλιξη των δραστηριοτήτων καθ' όλη τη διάρκεια της εφαρμογής τους και ο ρόλος της συνίστατο σε εκείνον του συμμετοχικού παρατηρητή. Δηλαδή, κατά την ώρα του μαθήματος παρευρισκόταν στην αίθουσα διδασκαλίας και απαντούσε ή έθετε ερωτήσεις στις ομάδες των μαθητών και κρατούσε σημειώσεις σχετικά με τη συνολική πορεία του μαθήματος καθώς και της κάθε ομάδας ξεχωριστά.

5.2.1 Τεχνολογικά εργαλεία που προτείνονται

Θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό Function Probe,στο οποίο προτείνεται η χρήση του συνδυασμού τριών ψηφίδων

- Πίνακας-συνάρτηση
- Γραφική παράσταση
- Αριθμομηχανή

με τις οποίες ο μαθητής μπορεί να χειριστεί συναρτήσεις έχοντας τη δυνατότητα των διαφορετικών αναπαραστάσεών τους (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση).

5.2.2 Χρήση συμπληρωματικού υλικού

Για τους μαθητές:

- Τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους)
- Βιβλίο (για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες)
- Φύλλα εργασίας τα οποία δίνονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων.
- Απλοποιημένες οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού

5.2.3 Διδακτική μέθοδος

Για την συγκεκριμένη δραστηριότητα το προβλεπόμενο διδακτικό μοντέλο είναι αυτό της διερευνητικής συνεργατικής μάθησης:

α) Οι μαθητές είναι χωρισμένοι σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων και κάθε μαθητής μέσα στην ομάδα έχει συγκεκριμένο ρόλο π.χ. ένας πληκτρολογεί, άλλος καταγράφει και άλλος ελέγχει και μεταφέρει τα αποτελέσματα των άλλων ομάδων. Ο ρόλος κάθε μαθητή δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος. Μετά το τέλος της διδακτικής ώρας ή μετά την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων που είναι ενταγμένες σε ένα σενάριο εναλλάσσονται οι ρόλοι και μάλιστα καλύτερη εφαρμογή του μοντέλου διδασκαλίας έχουμε όταν οι μαθητές αλλάξουν ομάδες.

β) Ο Καθηγητής συμβουλεύει, απευθύνει κατάλληλες ερωτήσεις στις ομάδες και διαχειρίζεται τον χρόνο ώστε να μην υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των σταδίων επεξεργασίας των διαφόρων ομάδων.

γ) Κάθε ομάδα ανακοινώνει ή συγκρίνει τα αποτελέσματά της με άλλες ομάδες ώστε οι ομάδες να αποφασίσουν ότι τα κοινά τους ευρήματα είναι σωστά.

δ) Για να ληφθεί μία απόφαση μέσα σε μία ομάδα θα πρέπει να υπάρξει ομοφωνία. σε περίπτωση όμως σοβαρής διαφωνίας ενός εκ των τριών ο διαφωνών περιγράφει

την άποψη του σε ένα μικρό κείμενο το οποίο καταχωρείται σαν υπόμνημα με το φύλλο αξιολόγησης στο τέλος.

5.2.4 Συλλογή δεδομένων

Τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν με τους ακόλουθους τρόπους :

- Καταγραφή των παρατηρήσεων της ερευνήτριας ανά μάθημα και ομάδα.
- Ηχογράφηση μιας ομάδας μαθητών η οποία ελήφθη ως ομάδα εστίασης καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνας.
- Συλλογή των φύλλων εργασίας που συμπλήρωσαν οι μαθητές.

5.2.5 Τρόποι ανάλυσης δεδομένων

Όλες οι ηχογραφήσεις απομαγνητοφωνήθηκαν. Η ερευνήτρια ανάλυσε και μελέτησε τα στοιχεία που προέκυψαν τόσο από τις απομαγνητοφωνήσεις, όσο και από τις προσωπικές της σημειώσεις κατά τη διάρκεια των μαθημάτων. Επίσης, εξετάστηκαν λεπτομερειακά οι απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας και λήφθηκε υπόψη η προηγούμενη εμπειρία της ερευνήτριας για την επίδοση των συγκεκριμένων μαθητών.

5.3 Παιδαγωγικοί, κοινωνιολογικοί και πολιτισμικοί στόχοι

5.3.1. Ο ρόλος του σεναρίου και των τεχνολογικών εργαλείων για την αναβάθμιση των συμμετεχόντων ή την ενίσχυση των ρόλων τους.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών σε μία "παραδοσιακή" τάξη αρχίζει με την εισαγωγή των διαφόρων μαθηματικών εννοιών μέσα από τους αντίστοιχους "αυστηρούς" ορισμούς και εστιάζεται στην εκμάθηση τεχνικών για τη λύση ασκήσεων και προβλημάτων. Στόχος αυτής της διδασκαλίας είναι να γνωρίσουν οι μαθητές τις τεχνικές αυτές, ώστε να μπορούν να τις αναπαράγουν, όταν τους ζητηθεί, γρήγορα και σωστά σε ανάλογες καταστάσεις.

Μία τέτοιου είδους διδακτική πρακτική ωθεί τους μαθητές (instrumental learners, Skemp,1976) στην αντίληψη ότι τα Μαθηματικά είναι μία σειρά κανόνων και αλγορίθμων και επομένως για να τα μάθει κανείς πρέπει να μάθει τους κανόνες αυτούς, συνήθως με αποστήθιση. Πρέπει επίσης να μάθει και τις περιπτώσεις στις οποίες εφαρμόζονται οι κανόνες. Η αντίληψη αυτή συνεπάγεται την ύπαρξη μιας αυθεντίας, όπως ο δάσκαλος ή ο συγγραφέας του βιβλίου των Μαθηματικών, ο οποίος ξέρει τους κανόνες και τους μεταφέρει στο μαθητή (Schoenfeld, 1985, Garofalo, 1989).

Τέτοιες αντιλήψεις εμποδίζουν τους μαθητές να κατανοήσουν ότι υπάρχουν εναλλακτικές στρατηγικές και προσεγγίσεις σε πολλά μαθηματικά προβλήματα με

συνέπεια να χάνουν σημαντικές μαθηματικές εμπειρίες όπως το να διερευνούν προβλήματα, να θέτουν ερωτήματα, να υποθέτουν κάποιες σχέσεις και να δοκιμάζουν αν ισχύουν (Ponte et al, 1994).

Οι καινούριες διδακτικές πρακτικές, που υπαγορεύονται από τα πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα, στρέφονται προς τη μετατροπή της "παραδοσιακής" σχολικής τάξης σε ένα εργαστήρι, όπου δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να συμμετέχει ενεργά στην απόκτηση της γνώσης, επιτρέποντάς του να πειραματίζεται, να διερευνά μαθηματικές έννοιες και προβλήματα συνεργαζόμενος με τους συμμαθητές του και έχοντας τον καθηγητή συνεργάτη και καθοδηγητή του.

Το προτεινόμενο σενάριο στοχεύει στην ενδυνάμωση των χαρακτηριστικών στοιχείων των καινούριων διδακτικών πρακτικών

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες δίνουν τις κατευθυντήριες γραμμές στον καθηγητή για να κατευθύνει και αυτός με τις σειρά του τους μαθητές να πειραματιστούν και διερευνήσουν καταστάσεις που περικλείουν τη χρήση μαθηματικών εννοιών. Τα ερωτήματα που δίνονται είναι ανοικτά και μπορούν να επεκταθούν είτε από τον καθηγητή, είτε από τους μαθητές κατά τη διάρκεια της διαδικασίας.

5.3.2. Ο ρόλος των προς χρήση εργαλείων (τεχνολογικών και άλλων) στο συγκεκριμένο σενάριο.

Το προτεινόμενο λογισμικό ανταποκρίνεται στις εξής δεσμεύσεις που απορρέουν από τα ερευνητικά ευρήματα και εξυπηρετούν τις ανάγκες των προτεινόμενων δραστηριοτήτων:

- Προάγει τη δημιουργικότητα
- Προκαλεί το μαθητή να κάνει εικασίες, να τις υλοποιεί και να τις ελέγχει με στόχο να εξάγει τα δικά του συμπεράσματα
- Προβάλλει διάφορους τρόπους έκφρασης μιας μαθηματικής έννοιας
- Ενθαρρύνει τις πρωτοβουλίες,
- Δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να μαθαίνει από τα λάθη του
- Επιτρέπει στο μαθητή να χρησιμοποιήσει τις γνώσεις που έχει αποκομίσει από την θεωρητική διδασκαλία και να εκτιμήσει έτσι την πρακτική τους αξία.

5.3.3. Αναφορά στα καινοτομικά στοιχεία του σεναρίου και των εργαλείων στη σχολική κοινότητα και στον αναμενόμενο ρόλο τους για τους συμμετέχοντες.

Διεθνώς, στις εκπαιδευτικές διαδικασίες, κυριαρχεί το σκεπτικό του εκπαιδευτικού εκσυγχρονισμού ώστε να εναρμονιστούν τα σχολεία με τις απαιτήσεις της σύγχρονης οικονομικής και κοινωνικής πραγματικότητας. Ένας από τους βασικούς στόχους της προσπάθειας αυτής είναι η δημιουργία πολιτών ικανών να

ενταχτούν στην κοινωνία των πληροφοριών, που το κύριο χαρακτηριστικό της είναι η εύκολη πρόσβαση σε πληθώρα πληροφοριών από τις οποίες καλούνται να επιλέξουν και να αξιοποιήσουν τις κατάλληλες και χρήσιμες. Μέσα σε ένα τέτοιο κοινωνικό πλαίσιο στόχος της εκπαίδευσης είναι η δημιουργία πολιτών ικανών να *'μάθουν να μαθαίνουν'*.

Η χρήση του υπολογιστή στις εκπαιδευτικές διαδικασίες ενισχύει ή και τροποποιεί τον παραδοσιακό τρόπο μάθησης στα εξής βασικά σημεία:

- Μέσω κατάλληλα σχεδιασμένου εκπαιδευτικού λογισμικού είναι δυνατό να οργανωθούν σύνολα δραστηριοτήτων διαθεματικής μάθησης προάγοντας έτσι τον επιστημονικό τρόπο σκέψης.
- Η επιλογή κατάλληλου λογισμικού βοηθάει το μαθητή να καλύψει το χάσμα μεταξύ της αφηρημένης και της συγκεκριμένης γνωστικής λειτουργίας.

Επίσης, για να χαρακτηριστεί ένα εκπαιδευτικό λογισμικό ως κατάλληλο θα πρέπει να πληροί τις εξής βασικές αρχές:

1. Να προσφέρει στον καθηγητή εναλλακτικούς τρόπους διδασκαλίας που δεν του προσφέρουν τα άλλα εκπαιδευτικά μέσα

2. Να μπορεί εύκολα να προσαρμόζεται από τον καθηγητή για να ταιριάζει στον τρόπο διδασκαλίας του

3. Να είναι εύκολο στη χρήση του

4. Να δραστηριοποιεί τους μαθητές και να τους κάνει να συμμετέχουν

5. Να δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να εκφράζουν τις διαισθητικές αντιλήψεις τους και να πειραματίζονται με αυτές (Kynigos et all, 1993)

6. Να ενισχύει την μάθηση ως προϊόν της ενεργούς συμμετοχής των μαθητών

Όπως προαναφέρθηκε το καινοτομικό μαθησιακό περιβάλλον που προτείνεται από το σενάριο αλλάζει τόσο το ρόλο του μαθητή όσο και το ρόλο του καθηγητή. Για να προσαρμοστεί ο καθηγητής στις νέες εκπαιδευτικές πρακτικές που απαιτούνται, θα πρέπει να επιμορφωθεί κατάλληλα ώστε να είναι σε θέση να επαναπροσδιορίσει τη "διδακτική του ατζέντα" (διδακτικοί και παιδαγωγικοί του στόχοι), η οποία διαμορφώνεται από τις αντιλήψεις του για τη φύση του μαθήματος, από την προσωπική παιδαγωγική και διδακτική πρακτική, από την αντίληψη που έχει για το ρόλο του και από το διαθέσιμο χρόνο.

5.4 Διδακτική διαδικασία

Η περιγραφή των χαρακτηριστικών της διδακτικής διαδικασίας που παρατηρήσαμε έχει καταγραφεί στο επόμενο κεφάλαιο σύμφωνα με τις φάσεις υλοποίησης της δραστηριότητας μέσα στην τάξη. Ο σχεδιασμός της δραστηριότητας είχε ως ακολούθως:

5.4.1 1η φάση: Εισαγωγή στη χρήση του λογισμικού

Στη φάση αυτή αφιερώθηκαν 3 διδακτικές ώρες με κύριο στόχο την εξοικείωση των μαθητών με το λογισμικό και τα χαρακτηριστικά του. Για το λόγο αυτό δόθηκε στους μαθητές μια δραστηριότητα (το πρόβλημα της επένδυσης χρημάτων) και τους ζητήθηκε να χρησιμοποιήσουν το Function Probe για την οργάνωση των δεδομένων του προβλήματος και την επίλυσή του. Η δραστηριότητα-πρόβλημα συνοδευόταν από ένα φυλλάδιο με γραπτές αναλυτικές οδηγίες για κάθε βήμα που έπρεπε να εκτελέσουν, καθώς και ένα φύλλο εργασίας με ερωτήσεις πάνω στο πρόβλημα, που έπρεπε να απαντήσουν κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας.

Το πρόβλημα που τους δόθηκε ήταν το ακόλουθο:

Κάποιος κατέθεσε στην τράπεζα 300 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 10% και μην έχοντας οικονομικές ανάγκες δεν έκανε καμία κίνηση των χρημάτων αυτών για 20 χρόνια. Ένας φίλος του όμως, ενώ κατέθεσε κι εκείνος το ίδιο ποσό με το ίδιο επιτόκιο, έπαιρνε στο τέλος κάθε χρόνου τον τόκο που του έδινε η τράπεζα χωρίς να μετακινήσει το αρχικό του ποσό.

Ποιος καταθέτης έχει τα περισσότερα χρήματα μετά από 20 χρόνια και γιατί.

Παράλληλα τους δόθηκε να συμπληρώσουν το παρακάτω φύλλο εργασίας το οποίο περιείχε ερωτήσεις πάνω στο πρόβλημα που μπορούσαν να τις απαντήσουν κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας :

Φύλλο εργασίας

Τάξη: Β΄ Λυκείου

Ημερομηνία :

Όνομα και επώνυμο ομάδας :

Κάποιος κατέθεσε στην τράπεζα 300 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 10% και μην έχοντας οικονομικές ανάγκες δεν έκανε καμία κίνηση των χρημάτων αυτών για 20 χρόνια. Ένας φίλος του όμως, ενώ κατέθεσε κι εκείνος το ίδιο ποσό με το ίδιο επιτόκιο, έπαιρνε στο τέλος κάθε χρόνου τον τόκο που του έδινε η τράπεζα χωρίς να μετακινήσει το αρχικό του ποσό.

1.α) Ποιος ήταν ο τόκος που έδινε η τράπεζα μετά από 1, 2, 3, 4 χρόνια στον κάθε έναν από τους δύο παραπάνω καταθέτες;

β) Να υπολογίσεις τα χρήματα του καθενός καταθέτη τα παραπάνω χρόνια. Υπόθεσε ότι ο δεύτερος καταθέτης κρατάει τους τόκους που παίρνει κάθε χρόνο από την τράπεζα και έτσι συνυπολόγισέ τους στα χρήματά του. Μπορείς να χρησιμοποιήσεις την 'Αριθμομηχανή' για να κάνεις τους υπολογισμούς σου.

	Καταθέτης Α (ευρώ)		Καταθέτης Β (ευρώ)	
Χρόνια	Τόκος	Χρήματα	Τόκος	Χρήματα
1				
2				
3				
4				

2. Διευκολύνει τον υπολογισμό των χρημάτων το κουμπί που κατασκευάσατε στην αριθμομηχανή;

……
……
……

3. Να κατασκευάσεις τρεις στήλες στο παράθυρο 'Πίνακας' που να αναπαριστούν τα χρήματα και των δύο καταθετών σε 20 χρόνια συναρτήσει του χρόνου με τη βοήθεια των κατάλληλων τύπων. Η μια στήλη θα είναι ο χρόνος σε χρόνια και οι άλλες δύο τα χρήματα των δύο καταθετών συναρτήσει του χρόνου

4. Στείλε τις παραπάνω στήλες στο παράθυρο ‘Γράφημα’. Τι παρατηρείς;

……
……
……

5. Ένας άλλος φίλος τους ισχυρίζεται ότι με το ρυθμό που αυξάνεται το ποσό, κάποια χρονική στιγμή τα χρήματα του πρώτου καταθέτη θα ξεπεράσουν τα 1500 ευρώ. Έλεγξε από τη γραφική παράσταση την εικασία αυτή. Ποια χρονιά θα συμβεί αυτό;

……
……
……

6. Ποια θα είναι τα χρήματα του δεύτερου καταθέτη τη χρονιά αυτή; Πού οφείλεται κατά τη γνώμη σας η μεγάλη απόκλιση των ποσών;

……
……
……

5.4.2 2η φάση: Εισαγωγή στο Νόμο της Εκθετικής Μεταβολής.

Η ιδέα του σεναρίου:

Οι μαθητές καλούνται, με βάση τα δεδομένα που τους δίνονται για το παγκόσμιο πληθυσμό της Γης και της Ασίας, να μελετήσουν το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Γης και της Ασίας αντίστοιχα και να προβλέψουν την αύξηση του πληθυσμού τα επόμενα χρόνια.

Η δραστηριότητα είναι έτσι σχεδιασμένη, ώστε να εστιάζει στην κατανόηση του νόμου της εκθετικής μεταβολής, που είναι ο εξής: ένα ποσό μεταβάλλεται εκθετικά, όταν αυξάνεται ή ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό. Η όλη διερεύνηση του προβλήματος στοχεύει στο να κατανοήσουν οι μαθητές τη διαφορά της εκθετικής μεταβολής από άλλες μεταβολές, όπως αύξηση ή μείωση κατά σταθερή ποσότητα. **Συγκεκριμένα οι προσδοκώμενοι διδακτικοί στόχοι ήταν:**

Οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν τι σημαίνει ότι ένα μέγεθος αυξάνεται εκθετικά.
- Να διακρίνουν τις αλλαγές που προκύπτουν στον τύπο μιας εκθετικής συνάρτησης, όταν αλλάζει μόνο η τιμή του αρχικού πληθυσμού.
- Να κατασκευάσουν τον τύπο που εκφράζει την εκθετική μεταβολή ενός μεγέθους (πληθυσμός).
- Να βρουν μαθηματικές σχέσεις μεταξύ συναρτησιακά συμμεταβαλλόμενων καταστάσεων από την καθημερινή ζωή, με τις οποίες είναι ήδη εξοικειωμένοι.
- Να κατανοήσουν τη διαφορά μεταξύ του ρυθμού αύξησης ενός μεγέθους και του ποσού της αύξησης.
- Να παρατηρήσουν ότι αν δυο μεταβλητές μεταβάλλονται εκθετικά με τον ίδιο ρυθμό, τότε και οι λόγοι των τιμών τους θα είναι ίδιοι.

Στη φάση αυτή αφιερώθηκαν 3 διδακτικές ώρες. Η δραστηριότητα-πρόβλημα συνοδευόταν από ένα φύλλο εργασίας με ερωτήσεις πάνω στο πρόβλημα, που έπρεπε οι μαθητές να απαντήσουν κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας, τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους), βιβλίο (για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες), απλοποιημένες οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού

.

Το φύλλο εργασίας που τους δόθηκε ήταν το ακόλουθο:

Φύλλο εργασίας

Τάξη: Β΄ Λυκείου

Ημερομηνία :

Όνομα και επώνυμο ομάδας :

Στην έκδοση ενός Αμερικάνικου περιοδικού, για το 1991 παρουσιάζονται τα ακόλουθα δεδομένα για τον παγκόσμιο πληθυσμό (σε δις) μέσα σε διάστημα 7 χρόνων (1984-1990):

Έτη	**Παγκόσμιος Πληθυσμός**
1984	4,766
1985	4,86132
1986	4,9585464
1987	5,05771733
1988	5,15887167
1989	5,26204911
1990	5,36729009

Όπου χρειάζεται, χρησιμοποίησε το παράθυρο 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις σου.

1. Άνοιξε το παράθυρο 'Πίνακας'. Σε μια στήλη βάλε τους πληθυσμούς που δίνονται πιο πάνω ανοίγοντάς τη τόσο όσο να φαίνονται ολόκληροι οι αριθμοί. Χρησιμοποιώντας την εντολή 'Διαφορά' στο μενού 'Πίνακας', βρες πόσο μεταβλήθηκε ο παγκόσμιος πληθυσμός από χρόνο σε χρόνο. Συγκρίνοντας τις μεταβολές σε ποιο συμπέρασμα οδηγείσαι;

……
……
……
……
……
……

2. Χρησιμοποιώντας την εντολή 'Λόγος' στο μενού 'Πίνακας' βρες με ποιο ρυθμό αυξήθηκε ο πληθυσμός από χρόνο σε χρόνο. Τι παρατηρείς;

……
……
……

3. Ποιος προβλέπεις να είναι ο παγκόσμιος πληθυσμός το 1991; Να εξηγήσεις με ποιον τρόπο υπολόγισες την απάντησή σου και να τον αιτιολογήσεις.

……
……
……

Το ίδιο περιοδικό εκδίδει ακόμα τα ακόλουθα στοιχεία για τον πληθυσμό της Ασίας την ίδια χρονική περίοδο:

Έτη	**Πληθυσμός Ασίας**
1984	2,785
1985	2,8407
1986	2,897514
1987	2,95546428
1988	3,01457357
1989	3,07486504
1990	3,13636234

4. Να χρησιμοποιήσεις την εντολή 'Λόγος' από το μενού 'Πίνακας', για να υπολογίσεις το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Ασίας, όπως έκανες για τον πληθυσμό της Γης. Να συγκρίνεις το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Ασίας με τον παγκόσμιο για τα χρόνια 1984-1990.

……
……
……

5. Ποιος προβλέπεις να είναι ο πληθυσμός της Ασίας το 1991; Να εξηγήσεις με ποιον τρόπο χρησιμοποίησες το Function Probe για να δόσεις την απάντησή σου.

……
……
……

6. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Γης παραμένει πρακτικά σταθερός για τα επόμενα 10 χρόνια, να επεκτείνεις τον πίνακά σου δημιουργώντας άλλες δύο εξαρτημένες στήλες, όπου στην πρώτη στήλη θα εισάγεις τον αριθμό των ετών μετά το 1984 (το οποίο θεωρείται σαν έτος 0) ως το 2000 και στη δεύτερη στήλη θα εισαγάγεις έναν τύπο που θα υπολογίζει τον αναμενόμενο πληθυσμό για κάθε ένα από τα έτη 1984 ως το 2000 συναρτήσει της πρώτης στήλης.

7. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού της Ασίας παραμένει πρακτικά σταθερός για τα επόμενα 10 χρόνια, να επεκτείνεις τον πίνακά σου δημιουργώντας άλλη μια εξαρτημένη στήλη που θα υπολογίζει τον αναμενόμενο πληθυσμό για κάθε ένα από τα έτη 1984 ως το 2000 συναρτήσει του αριθμού των ετών μετά το 1984, (το οποίο θεωρείται σαν έτος 0) ως το 2000.

8. Με τα δεδομένα του έτους 1984, πόσες φορές μεγαλύτερος ήταν ο παγκόσμιος πληθυσμός από αυτόν της Ασίας; Με τις τιμές που υπολόγισες για το έτος 2000, πόσες φορές μεγαλύτερος θα είναι ο παγκόσμιος πληθυσμός από αυτόν της Ασίας; Εξήγησε το αποτέλεσμα. Μπορείτε να εξάγετε κάποιο συμπέρασμα;

……
……
……

5.4.3 3η φάση: Εφαρμογή του νόμου της εκθετικής μεταβολής-επίλυση προβλήματος.

Η ιδέα του σεναρίου:

Οι μαθητές καλούνται να παίξουν το ρόλο ενός βιολόγου που ενδιαφέρεται να υπολογίσει τον πληθυσμό ενός νέου είδους βακτηριδίων, τα οποία υπάρχουν σε μια καλλιέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο, έχοντας παρατηρήσει ότι ο ρυθμός αύξησής τους είναι σταθερός.

Ο πληθυσμός των βακτηριδίων ακολουθεί το νόμο της εκθετικής μεταβολής εφόσον ο ρυθμός αύξησής των βακτηριδίων είναι σταθερός. Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν τον τύπο αυτό, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουν, για να υπολογίσουν τον πληθυσμό των βακτηριδίων.

Η δραστηριότητα-πρόβλημα σχεδιάστηκε για να δοθεί στους μαθητές ως εφαρμογή και περαιτέρω διερεύνηση του εκθετικού νόμου για διαφορετικές τιμές του ρυθμού αύξησης ενός πληθυσμού.

Συγκεκριμένα, οι προσδοκώμενοι διδακτικοί στόχοι ήταν:

Οι μαθητές:

- Να εφαρμόσουν το νόμο της εκθετικής μεταβολής σε πραγματικές καταστάσεις.
- Να συνδέσουν τον πληθυσμό των βακτηριδίων με το ρυθμό αύξησής τους.
- Να κατασκευάσουν τον τύπο που εκφράζει την εκθετική μεταβολή ενός μεγέθους.
- Να δουν τι επιπτώσεις έχουν στη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης οι αλλαγές του ρυθμού αύξησης ενός πληθυσμού.
- Να προσεγγίζουν τη λύση ενός προβλήματος από τη γραφική παράσταση και να επαληθεύουν τη λύση αυτή από τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.
- Να διαπιστώσουν την αναδρομικότητα του εκθετικού νόμου.
- Να χειριστούν συναρτησιακές σχέσεις μέσα από τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής τους.
- Να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις που έχουν αποκομίσει από τη θεωρητική διδασκαλία και να εκτιμήσουν έτσι την πρακτική τους αξία.

Στη φάση αυτή αφιερώθηκαν 3 διδακτικές ώρες. Η δραστηριότητα-πρόβλημα συνοδευόταν από ένα φύλλο εργασίας με ερωτήσεις πάνω στο πρόβλημα, που έπρεπε οι μαθητές να απαντήσουν κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας, τετράδιο (για να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους), βιβλίο (για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες), απλοποιημένες οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού. Το φύλλο εργασίας που τους δόθηκε ήταν το ακόλουθο:

Φύλλο εργασίας

Τάξη: Β΄ Λυκείου

Ημερομηνία :

Όνομα και επώνυμο ομάδας :

Ένας βιολόγος ενδιαφέρεται να μελετήσει ένα νέο είδος βακτηριδίων. Όταν παρατηρεί για πρώτη φορά με το μικροσκόπιό του την καλλιέργεια των βακτηριδίων, μετράει 100 βακτηρίδια. Με προσεκτική και στενή παρακολούθηση της καλλιέργειας παρατηρεί ότι ο αριθμός των βακτηριδίων αυξάνει κατά 10% κάθε 10 λεπτά.

Όπου χρειάζεται, χρησιμοποιείστε το παράθυρο 'Αριθμομηχανή' για τις πράξεις σας.

1. Ποιος είναι ο αριθμός των βακτηριδίων τα πρώτα 10 λεπτά;

……
……
……

2. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα. Σαν χρόνο 0 θεωρείστε τη χρονική στιγμή που ο βιολόγος παρατήρησε για πρώτη φορά τα βακτηρίδια.

Χρόνος σε λεπτά	Αριθμός βακτηριδίων
0	
10	
20	
30	
40	
50	

3. Δημιουργείστε έναν πίνακα στο παράθυρο 'Πίνακας', που να περιέχει δύο στήλες. Στην πρώτη στήλη που θα την ονομάσετε 'Χρόνος', να εισάγετε τον αριθμό των λεπτών, ξεκινώντας από το 0 μέχρι το 50 με βήμα 10 και στη δεύτερη, που θα την ονομάσετε 'Αριθμός Βακτηριδίων', να εισάγετε τον αριθμό των βακτηριδίων στον αντίστοιχο χρόνο με βάση τον πίνακα που συμπληρώσατε στο προηγούμενο ερώτημα.

4. Να στείλετε τις δύο αυτές στήλες στο παράθυρο 'Γράφημα'. Αν τα σημεία δε φαίνονται, διορθώστε το πρόβλημα, ώστε να είναι ορατά. Τι παρατηρείτε; Τι είδους μεταβολή ακολουθούν οι δύο μεταβλητές; (γραμμική, εκθετική, λογαριθμική κτλ.);

……
……
……

5. Προσπαθήστε να δημιουργήσετε μια τρίτη στήλη στο παράθυρο ‘Πίνακας’ που να την ονομάσετε ‘Υπολογισμός Βακτηριδίων’ και η οποία να γεμίζει με βάση τον τύπο που νομίζετε ότι συνδέει το χρόνο (ανά 10 λεπτά) και τον αριθμό των βακτηριδίων.

……
……
……

6. Πληκτρολογήστε τον τύπο αυτό στο παράθυρο ‘Γράφημα’.

7. Με βάση τη γραφική παράσταση, μετά από πόση ώρα υπήρχαν στην καλλιέργεια λιγότερα από 200 βακτηρίδια; Επιλέξτε κατάλληλο εργαλείο (Εργαλείο δείκτη σημείου) για να δείτε τις συντεταγμένες του σημείου. Επαληθεύστε το και στο παράθυρο ‘Πίνακας’.

……
……
……

8. Αν αντίθετα με τα προηγούμενα δεδομένα, ο βιολόγος ανακάλυπτε ότι τα βακτηρίδια πολλαπλασιάζονται κάθε 10 λεπτά, αλλά παράγονται 20% βακτηρίδια κάθε 10 λεπτά, να δημιουργήσετε στο παράθυρο ‘Πίνακας’ μια εξαρτημένη στήλη που να υπολογίζει τον αριθμό των βακτηριδίων με τα νέα δεδομένα. Σε αυτήν την περίπτωση πώς μεταβάλλεται ο τύπος που ίσχυε πριν; Τι έχει αλλάξει στα προηγούμενα δεδομένα;

……
……
……

9. Στο παράθυρο ‘Γράφημα’ να κάνετε τη γραφική παράσταση του νέου τύπου. Τι παρατηρείτε σχετικά με την αρχική γραφική παράσταση;

……
……
……

ΜΕΡΟΣ 3ο

Η ΕΡΕΥΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο}

6. Περιγραφή διδακτικής διαδικασίας – Γνωστικοί στόχοι.

6.1. Περιγραφή και ανάλυση της εργασίας των μαθητών κατά την 1^{η} φάση :

Οι μαθητές κατά τη φάση αυτή δούλεψαν με βάση το φυλλάδιο οδηγιών που τους δόθηκε. Δεν παρατηρήσαμε να έχουν ιδιαίτερες δυσκολίες εξοικείωσης με το λογισμικό, εκτός από τις περιπτώσεις που παρουσιαζόταν κάποιο τεχνικό πρόβλημα π.χ στην κατασκευή κουμπιού στο παράθυρο 'αριθμομηχανή', θέμα που αναλύεται στη συνέχεια. Οι μαθητές βρήκαν το φυλλάδιο κατατοπιστικό, αν και στην πλειοψηφία τους ήθελαν να συμβουλεύονται την ερευνήτρια για το τι θα πράξουν στο κάθε επόμενο βήμα.

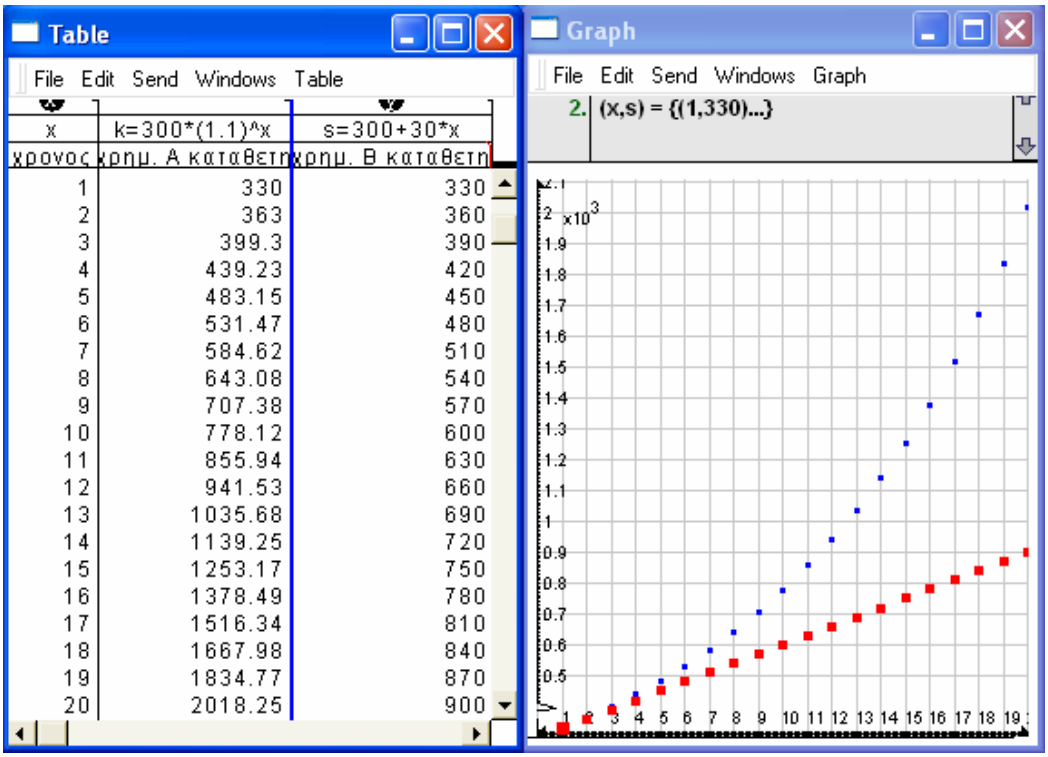
Αξιοσημείωτο είναι ότι τα παιδιά ενθουσιάστηκαν με τη διαφορετική προσέγγιση των συναρτήσεων μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων. Έδειξαν ιδιαίτερη προθυμία να λάβουν μέρος και στις επόμενες φάσεις της έρευνας.

Αν και σε αυτή τη φάση δεν αποτελούσε κύριο στόχο μας οι μαθητές να εμπλακούν με μαθηματικές έννοιες και να εξάγουν συμπεράσματα, η πορεία της έρευνας έδειξε ότι :

Οι μαθητές :

- Κατασκεύασαν τον τύπο μιας εκθετικής μεταβολής.
- Διέκριναν τη διαφορά της αύξησης των τιμών ανάμεσα στην εκθετική και γραμμική συνάρτηση.
- Βρήκαν τη λύση ενός προβλήματος από τη γραφική παράσταση.

Στην εικόνα 1 φαίνεται η εργασία μιας ομάδας μαθητών κατά τη φάση αυτή.



x	k=300*(1.1)^x	s=300+30*x
χρονος	χρημ. Α καταθετη	χρημ. Β καταθετη
1	330	330
2	363	360
3	399.3	390
4	439.23	420
5	483.15	450
6	531.47	480
7	584.62	510
8	643.08	540
9	707.38	570
10	778.12	600
11	855.94	630
12	941.53	660
13	1035.68	690
14	1139.25	720
15	1253.17	750
16	1378.49	780
17	1516.34	810
18	1667.98	840
19	1834.77	870
20	2018.25	900

Εικόνα 1: Ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση μιας ομάδας μαθητών για το πρόβλημα των καταθέσεων.

6.2. Περιγραφή και ανάλυση της εργασίας των μαθητών κατά την 2η φάση :

Κατά τη φάση αυτή οι μαθητές κλήθηκαν, με βάση τα δεδομένα που τους δόθηκαν για το παγκόσμιο πληθυσμό της Γης και της Ασίας, να μελετήσουν το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού της Γης και της Ασίας αντίστοιχα και να προβλέψουν την αύξηση του πληθυσμού τα επόμενα χρόνια. Γι' αυτό το πρόβλημα δούλεψαν μόνο στο παράθυρο 'πίνακας', στο οποίο δημιούργησαν διάφορες εξαρτημένες στήλες τις οποίες σύγκριναν μεταξύ τους, για να οδηγηθούν στις ιδιότητες του εκθετικού νόμου.

Οι μαθητές στη διάρκεια αυτής της δραστηριότητας έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και συμμετείχαν όλοι ενεργά. Συνεργάστηκαν όλοι αρμονικά στις ομάδες τους, χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα. Οι διδακτικοί στόχοι που τέθηκαν κατά το σχεδιασμό κατακτήθηκαν σε μεγάλο μέρος τους από όλες τις ομάδες. Αξιοσημείωτο είναι ότι προβληματίστηκαν για τα μεταβαλλόμενα και μη ποσά στο πρόβλημα. Κατανόησαν τη διαφορά ανάμεσα στο ρυθμό αύξησης του πληθυσμού και το ποσό αύξησής τους. Συνέδεσαν το ρυθμό αύξησης με το 'Λόγο' και το ποσό με τη 'Διαφορά' στο λογισμικό.

Μετά από συζήτηση με το πέρας της δραστηριότητας κατέληξαν όλες οι ομάδες στο συμπέρασμα ότι ενώ ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι σταθερός

(και ίσος με 1,02), το ποσό αύξησης δεν είναι. Στο σημείο αυτό τονίστηκε ότι εκθετικά μεταβάλλονται μεγέθη που ο λόγος των τιμών τους παραμένει σταθερός, σε αντίθεση με το ποσό τους που μεταβάλλεται. Χαρακτηριστικός είναι ο διάλογος που ακολουθεί μεταξύ των μαθητών μιας ομάδας:

M_1: Για να δούμε ποια είναι η μεταβολή θα αφαιρέσουμε δύο διαδοχικές τιμές και μετά ξανά το ίδιο για τις επόμενες…Ας κάνουμε πράξεις στην αριθμομηχανή…είναι μεγάλα τα νούμερα!

M_2: Γράψε στο πρόχειρο το πρώτο (ο M_1 γράφει στο τετράδιο το αποτέλεσμα της πρώτης αφαίρεσης).

M_3: Τώρα το ίδιο για το δεύτερο και το τρίτο νούμερο…είναι διαφορετικά!

M_2: Φαινόταν και με το μάτι…έπρεπε όμως να είμαστε σίγουροι.

M_1: Πρέπει να καταγράψουμε το συμπέρασμα.

οπότε στο φύλλο εργασίας συμπληρώνουν:

Παρατηρούμε ότι από χρόνο σε χρόνο η μεταβολή στον πληθυσμό της Γης είναι διαφορετική, δηλαδή η αύξηση του παγκόσμιου πληθυσμού δε μεταβάλλεται κατά ένα σταθερό ποσό από χρόνο σε χρόνο αλλά 'ακανόνιστα'.

Για την απάντηση στο δεύτερο ερώτημα εργάστηκαν με την ίδια ευκολία, πληκτρολογώντας την εντολή 'Λόγος' στο μενού 'Πίνακας'.

M_1: Είναι όλα ίδια…

M_2: Δηλαδή ο λόγος είναι ο ίδιος.

Ε: Ο λόγος μεταξύ ποιών τιμών;

M_2: Αυτών που δείχνει το βελάκι, της πρώτης με τη δεύτερη, της δεύτερης με την τρίτη…

Ε: …και ο λόγος αυτός τι εκφράζει;

M_2: το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού…έτσι λέει…(και δείχνει το αντίστοιχο ερώτημα στο φύλλο εργασίας).

M_1: Δηλαδή, ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι σταθερός. Αυτό πρέπει να γράψουμε σαν παρατήρηση.

Ε: Δηλαδή υπάρχει κάτι που μεταβάλλεται και κάτι που παραμένει σταθερό;

M_3: Ναι.

Ε: Μπορείς να μου πεις τι ακριβώς;

M_3: Μεταβάλλεται ο πληθυσμός…πώς το γράψαμε πριν…το πλήθος, το ποσό για κάθε χρονιά είναι 'ακανόνιστο'.

Ε: εννοείς μη σταθερό;

M_3: Ναι…ενώ ο ρυθμός αύξησης παραμένει σταθερός. Αυτό!

Ε: Εξαιρετικά!

M_1: …γιατί δεν είναι στην ίδια σειρά; Μπορούμε να το κάνουμε;

Ε: Ναι, αν θες μπορούμε να δοκιμάσουμε μαζί!

Σε αυτό το σημείο κρίθηκε απαραίτητη η παρέμβαση της ερευνήτριας. Εξηγήσαμε ότι οι τιμές σε μια στήλη που κατασκευάστηκε από τις εντολές 'Διαφορά' και 'Λόγος' τοποθετούνται εκτός θέσης σε σχέση με την αρχική στήλη. Αυτό συμβαίνει, για να τονιστεί το γεγονός ότι οι εκτός θέσης τιμές είναι το αποτέλεσμα κάποιας πράξης μεταξύ των δεδομένων ανάμεσα στα οποία βρίσκονται.

Αν θέλουμε να ευθυγραμμίσουμε τις τιμές αυτές με τις αρχικές, χρησιμοποιούμε τις εντολές 'Μετατόπιση προς τα πάνω' και 'Μετατόπιση προς τα κάτω'. Επειδή αποτελούσε τεχνικό μέρος, δεν απαιτήθηκε κάτι τέτοιο από καμία ομάδα.

Στο ερώτημα 3 κατάφεραν μόνο διαισθητικά να εντοπίσουν την αναδρομικότητα του τύπου της εκθετικής μεταβολής. Η επόμενη τιμή βρίσκεται από την προηγούμενη πολλαπλασιασμένη κατά μία σταθερή ποσότητα.

Για την πρόβλεψη του παγκόσμιου πληθυσμού το 1991 και την απάντηση στο τρίτο ερώτημα ακολούθησαν τα εξής:

M_1: Θα βοηθηθούμε από τη διαφορά;

M_2: Όχι, δε βγαίνει…η μεταβολή στον πληθυσμό δεν είναι σταθερή.

Ε: Δηλαδή;

M_2: … δεν μπορούμε να ξέρουμε πόσο θα είναι μετά.

M_3: Έχει δίκιο, κάτι άλλο πρέπει να κάνουμε…

Σκέφτονται…

M_1: Μήπως από το λόγο;…Αλλά δε μας λέει και τίποτα…μόνο ότι κάθε φορά είναι 1,02.

Ε: Τι σημαίνει αυτό;

M_1: Ποιο;

Ε: Ο λόγος είναι σταθερός και ίσος με 1,02;

M_3: Είδαμε ότι εκφράζει το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού…(παύση)

M_2: Δηλαδή η επόμενη τιμή προς την προηγούμενη είναι ίση με 1,02

Στο χαρτί γράφει: Ε/Π = 1.02

M_2: …την προηγούμενη την ξέρω άρα... τελείωσε.

M_1: Να δοκιμάσουμε αν δουλεύει για δύο τιμές που ήδη ξέρουμε…πρέπει να είμαστε σίγουροι. Χρησιμοποίησε την αριθμομηχανή.

M_3: Βγαίνει!

M_2: Άρα, θα το βρούμε έτσι.

Πληκτρολογεί στην αριθμομηχανή: 5367290090* 1.02 = 5474635900, που αποτελεί τον πληθυσμό για το 1991.

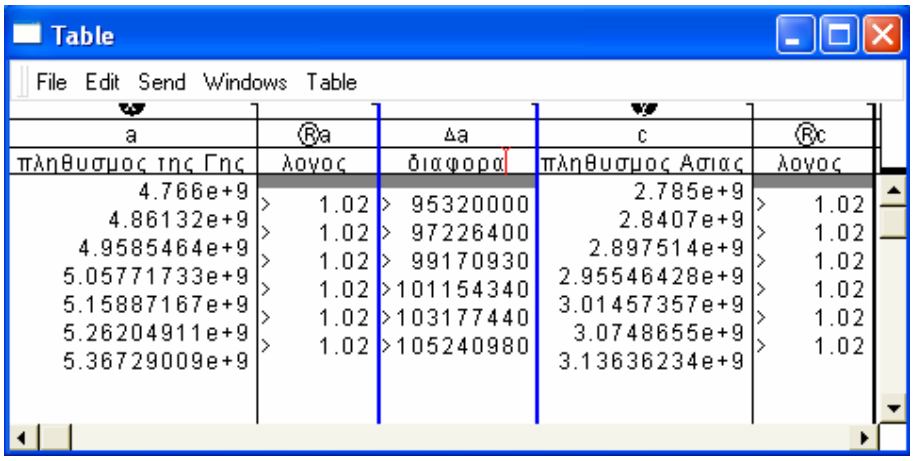
M_1: Τι να γράψω στο φύλλο εργασίας; Θέλει να αιτιολογήσουμε την απάντηση.

M_2: Ότι κάναμε… για να δούμε…Επειδή ο λόγος είναι σταθερός μπορώ να υπολογίζω κάθε επόμενη τιμή από την προηγούμενή της πολλαπλασιάζοντας επί 1,02. Έτσι υπολογίζουμε τον πληθυσμό το 1991 από αυτόν του 1990 με πολλαπλασιασμό επί 1,02.

Παρόλα αυτά δεν κατάφεραν να το εκτελέσουν με τη βοήθεια του λογισμικού, όπως τους ζητήθηκε στο ερώτημα 5, αν και ορισμένοι σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν την εντολή 'Γέμισμα' από το μενού 'Πίνακας', συνάντησαν όμως τεχνικές δυσκολίες και τα παράτησαν.

Εδώ διαπιστώθηκαν δυσκολίες στη δημιουργία σχέσεων για τη συμπλήρωση των εξαρτημένων στηλών πρόβλημα που συνδέεται άμεσα με τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να διακρίνουν την ανεξάρτητη από την εξαρτημένη μεταβλητή, καθώς και στο να βρουν τις μαθηματικές σχέσεις που τις συνδέουν. Γι' αυτές οι μαθητές προτίμησαν να καταχωρούν τις τιμές μία-μία.

Στην εικόνα 2 φαίνεται η εργασία της ομάδας εστίασης μέχρι εδώ.



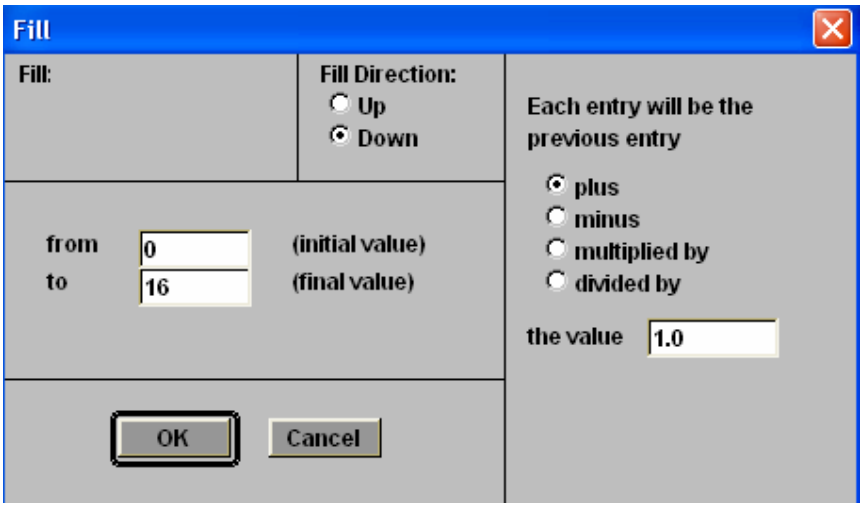
Table

File Edit Send Windows Table

a	Ⓡa	Δa	c	Ⓡc
πληθυσμος της Γης	λογος	διαφορα	πληθυσμος Ασιας	λογος
4.766e+9			2.785e+9	
4.86132e+9	1.02	95320000	2.8407e+9	1.02
4.9585464e+9	1.02	97226400	2.897514e+9	1.02
5.05771733e+9	1.02	99170930	2.95546428e+9	1.02
5.15887167e+9	1.02	101154340	3.01457357e+9	1.02
5.26204911e+9	1.02	103177440	3.0748655e+9	1.02
5.36729009e+9	1.02	105240980	3.13636234e+9	1.02

Εικόνα 2: Ο πίνακας τιμών μιας ομάδας μαθητών για το πρόβλημα των πληθυσμών.

Σχετικά με το ερώτημα 6 του φύλλου εργασίας, οι μαθητές χρησιμοποίησαν την εντολή 'Fill' ('Γέμισμα') του μενού 'Πίνακα' (Εικόνα 3) για την ανεξάρτητη μεταβλητή (τα έτη). Για την κατασκευή του τύπου που εκφράζει την εκθετική μεταβολή ενός μεγέθους οι μαθητές δυσκολεύτηκαν με το λογισμικό. Τεχνικά προβλήματα όπως η εισαγωγή της δύναμης, το πληκτρολόγιο στα Αγγλικά για την εισαγωγή των μεταβλητών καθυστέρησαν την εργασία των μαθητών. Σχετικά με το τεχνικό μέρος, η ερευνήτρια υπενθύμιζε συνεχώς τις βασικές εντολές για την αποφυγή στο δυνατό οι μαθητές να ασχολούνται με την εκμάθηση του προγράμματος, κάτι στο οποίο δεν θέλαμε να εστιάσουμε στη συγκεκριμένη φάση.



Εικόνα 3: η εντολή 'Γέμισμα' από το μενού 'Πίνακας'

Στο τελευταίο ερώτημα (ερώτημα 8) δεν απάντησαν όλες οι ομάδες. Κάποιοι παρατήρησαν ότι ο λόγος των πληθυσμών παραμένει σταθερός, χωρίς όμως να μπορέσουν να το αιτιολογήσουν και να γενικεύσουν βγάζοντας κάποιο συμπέρασμα. Καμία ομάδα δεν σκέφτηκε να εργαστεί αλγεβρικά με βάση τους τύπους των δύο πληθυσμών γι' αυτό το ερώτημα, κάτι που ίσως να ήταν αναμενόμενο στην παραδοσιακή τάξη των μαθηματικών. Ο παρακάτω διάλογος μαρτυρά τη δυσκολία

που αντιμετώπισαν οι μαθητές μιας ομάδας. Οι υπόλοιπες είχαν αντίστοιχα προβλήματα ή δεν απάντησαν καν στο ερώτημα.

M_2: Ζητάει να πούμε πόσες φορές είναι μεγαλύτερος ο πληθυσμός της Γης από αυτόν της Ασίας το '84.

M_3: Δηλαδή πόσο χωράει…

M_1: Διαίρεση!

M_3: …μεγάλα νούμερα!

M_1: …σταματάω εδώ…είναι 1,71 φορές μεγαλύτερος…δηλαδή περίπου.

M_3: Έπρεπε να το κάνουμε στην αριθμομηχανή!

M_1: Κάντο τώρα για το 2000.

M_3: Το ίδιο! …1,71.

Ε: Που οφείλεται αυτό; Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

……..

Είναι σπουδαίο, κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης, ο μαθητής να μπορεί να μοιράζεται τις εμπειρίες του με αυτές του δασκάλου. Αυτό επιτρέπει στο παιδί να μάθει από τον ενήλικα όχι «κάνοντας αυτό που λέει ο δάσκαλος» αλλά «κάνοντας αυτό που κάνει ο δάσκαλος» και ένα από τα πράγματα που κάνει ο δάσκαλος είναι να κυνηγήσει το πρόβλημα μέχρι να γίνει απόλυτα κατανοητό (S. Papert, 1980, M. Donaldson, 1984, M. Hughes, 1986,). Παράλληλα, ο δάσκαλος αναγνωρίζει ότι δεν διδάσκει τους μαθητές μαθηματικά, αλλά τους διδάσκει πώς να αναπτύξουν τη γνώση τους (Confrey, 1990).Ο δάσκαλος είναι ταυτόχρονα και μαθητής στη διαδικασία της διδακτικής πράξης (Steffe and Ambrosio, 1995).

Ε: Ας προσπαθήσουμε μαζί! Θέλουμε το λόγο των δύο πληθυσμών. Πώς να το γράψουμε αυτό σε μια νέα στήλη στο πρόγραμμα;

M_3: Να ορίσουμε μεταβλητή.

Ε: Καλή ιδέα, πως;

M_3: Στα Αγγλικά, (πληκτρολογεί L= k/M).

M_1: Κοίτα! Είναι όλα ίδια!

Ε: Τι σημαίνει αυτό; Μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα;

……

M_2: Ο λόγος των δύο πληθυσμών είναι και αυτός σταθερός.

Ε: Γιατί πιστεύετε συμβαίνει αυτό;

……

Τελικά καμία απάντηση, ζητήθηκε από την ερευνήτρια να βοηθήσει.

Η εργασία της ομάδας εστίασης φαίνεται στην εικόνα 4.

Table

File Edit Send Windows Table

x	k=4766000000*(1.02)^x	M=2785000000*(1.02)^x	L=k/M
αριθμος ετων μετα το 1984	υπολογισμος του πληθυσμου της Γης ως το 2000	υπολογισμος του πληθυσμου της Ασιας ως το 2000	Συγκριση των δυο πληθυσμων
0	4.766e+9	2.785e+9	1.71
1	4.86132e+9	2.8407e+9	1.71
2	4.9585464e+9	2.897514e+9	1.71
3	5.05771733e+9	2.95546428e+9	1.71
4	5.15887167e+9	3.01457357e+9	1.71
5	5.26204911e+9	3.07486504e+9	1.71
6	5.36729009e+9	3.13636234e+9	1.71
7	5.47463589e+9	3.19908958e+9	1.71
8	5.58412861e+9	3.26307138e+9	1.71
9	5.69581118e+9	3.3283328e+9	1.71
10	5.80972741e+9	3.39489946e+9	1.71
11	5.92592195e+9	3.46279745e+9	1.71
12	6.04444039e+9	3.5320534e+9	1.71
13	6.1653292e+9	3.60269447e+9	1.71
14	6.28863578e+9	3.67474836e+9	1.71
15	6.4144085e+9	3.74824332e+9	1.71
16	6.54269667e+9	3.82320819e+9	1.71

Εικόνα 4: Ο Πίνακας τιμών μιας ομάδας με την κατασκευή τύπου για τους πληθυσμούς.

Γενικά οι μαθητές έδειξαν να χαίρονται τη διαδικασία περισσότερο σαν παιχνίδι παρά ως μάθημα μαθηματικών.

Στη φάση αυτή αποφύγαμε να επεκταθούμε στο παράθυρο 'Γράφημα', διότι χρησιμοποιούνται πολύ μεγάλα νούμερα και οι γραφικές παραστάσεις των πληθυσμών της Γης και της Ασίας δεν παριστάνονται ικανοποιητικά. Η δραστηριότητα της επόμενης φάσης καλύπτει αυτήν ακριβώς την έλλειψη, προτρέποντας τους μαθητές να εργαστούν στο παράθυρο 'Γράφημα' μετασχηματίζοντας κατάλληλα διάφορες γραφικές παραστάσεις της εκθετικής μεταβολής.

6.3. Περιγραφή και ανάλυση της εργασίας των μαθητών κατά την 3η φάση :

Αν και ο αρχικός σχεδιασμός για την πορεία της φάσης αυτής ήταν να αφήσουμε τους μαθητές να σκεφτούν και να καταστρώσουν εντελώς μόνοι τους τη λύση του προβλήματος, στην πλειοψηφία τους δεν μπόρεσαν να το επιτύχουν.

Στο 1ο και 2ο ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές να εξάγουν έναν αναδρομικό τύπο για τον υπολογισμό των βακτηριδίων. Για την απάντηση στο 1ο και το 2ο ερώτημα, οι μαθητές εργάστηκαν στο τετράδιο τους βοηθούμενοι στις πράξεις τους από την 'Αριθμομηχανή'. Μια ομάδα από τις τέσσερις δυσκολεύτηκε στην εξαγωγή του αναδρομικού τύπου και χρειάστηκε να παρέμβει η ερευνήτρια.

Ε: Τι συμβαίνει στα πρώτα 10 λεπτά;

M_1: Ο αριθμός των βακτηριδίων αυξάνεται κατά 10%.

Ε: Πόσα είχα στην αρχή;

M_1: 100.

Ε:… και τώρα;

M_2: Όσα είχα συν 10%…

Ε: 10% τίνος;

……

M_2:…του 100;

Ακολούθησε συζήτηση μεταξύ της ερευνήτριας και της ομάδας για το τι εκφράζει το ποσοστό, δούλεψαν μαζί για τα επόμενα δύο-τρία βήματα και οδηγήθηκαν στον αναδρομικό τύπο.

Υπήρξαν ομάδες που ζήτησαν διευκρίνιση για το ρόλο που παίζει ο χρόνος στον αναδρομικό τύπο. Τελικά συζητήθηκε με όλους στην τάξη και διευκρινίστηκε πως τα πρώτα 10 λεπτά είναι η χρονική περίοδος 1, τα 20 λεπτά η χρονική περίοδος 2 κ.ο.κ.

Η ομάδα εστίασης στο τετράδιο της παρουσίασε τον εξής πίνακα:

Χρόνος	Αριθμός Βακτηριδίων
0	100
10	110
20	121
30	133,1
40	146,41
50	161,051

Με την εξής διαδικασία αριθμητικών πράξεων:

$B_0 = 100$

$B_1 = B_0 + 10/100 * B_0 = (1 + 10/100) * B_0 = 1.1 * B_0 = 110.$

$B_2 = B_1 + 10/100 * B_1 = (1 + 10/100) * B_1 = 1.1 * B_1 = 1.1 * 1.1 * B_0 = (1.1)^2 * B_0 = 121.$

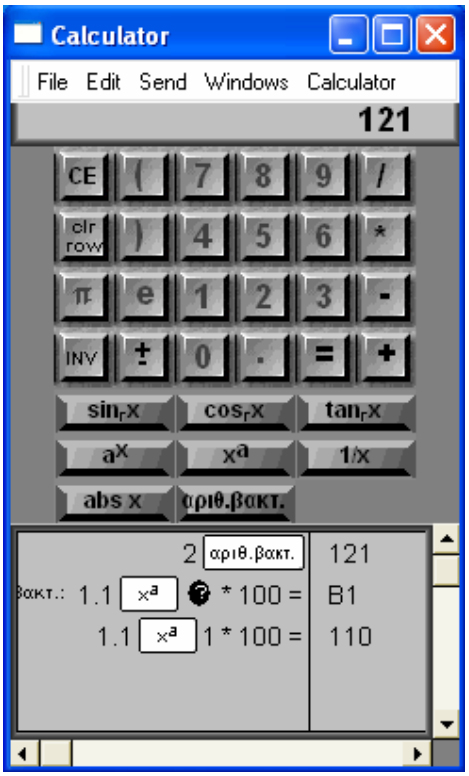
$B_3 = B_2 + 10/100 * B_2 = (1 + 10/100) * B_2 = 1.1 * B_2 = 1.1 * (1.1)^2 * B_0 = (1.1)^3 * B_0 = 133,1$

Γενικά: $B_\omega = (1.1)^\omega * B_0$, οπότε:

$B_4 = (1.1)^4 * B_0 = 146,41.$

$B_5 = (1.1)^5 * B_0 = 161,051.$

Στο σημείο αυτό θίχτηκε πως η δημιουργία ενός νέου κουμπιού που να υπολογίζει γρήγορα τον αριθμό των βακτηριδίων στο παράθυρο 'Αριθμομηχανή' μπορεί να μας διευκολύνει στις πράξεις και να κερδίσουμε χρόνο. Φάνηκε πως η διαδικασία δημιουργίας κουμπιού μπέρδεψε αρκετά τους μαθητές. Αρκετά παιδιά δυσκολεύτηκαν λόγω μη εξοικείωσης με το λογισμικό και τη χρήση Η/Υ.



Εικόνα 5: Η δημιουργία 'κουμπιού' στο παράθυρο 'Αριθμομηχανή' από μια ομάδα μαθητών

Η κατασκευή κουμπιού, χαρακτηριστική λειτουργικότητα του παραθύρου αυτού που το διαφοροποιεί από τις συνηθισμένες αριθμομηχανές, δυσκόλεψε αρκετά

τους μαθητές**.** Η κατασκευή κουμπιού κατά την Confrey (μία εκ των δημιουργών του λογισμικού) (1989) είναι μία νέα αναπαράσταση της συνάρτησης, η οποία υπογραμμίζει την αντίληψη της συνάρτησης σαν τη γενίκευση μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας. Υπήρξαν ομάδες στις οποίες στάθηκε αδύνατο να κατασκευάσουν οι μαθητές κουμπί. Σε σχετικές ερωτήσεις οι μαθητές αυτοί απαντούσαν ότι δεν καταλαβαίνουν γιατί είναι απαραίτητο να το κάνουν, αφού η εύρεση του αριθμού των βακτηριδίων γίνεται εύκολα κάνοντας πράξεις. Στην ομάδα εστίασης η ερευνήτρια υποχρεώθηκε να δώσει αναλυτικές υποδείξεις στους μαθητές για να κατασκευάσουν το κουμπί που θα τους έδινε τον αριθμό των βακτηριδίων.

Στο 3^{ο} ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές να δημιουργήσουν έναν πίνακα στο παράθυρο 'Πίνακας', που να περιέχει δύο στήλες. Στην πρώτη στήλη που θα την ονομάσουν 'Χρόνος', να εισάγουν τον αριθμό των λεπτών, ξεκινώντας από το 0 μέχρι το 50 με βήμα 10 και στη δεύτερη, που θα την ονομάσουν 'Αριθμός Βακτηριδίων', να εισάγουν τον αριθμό των βακτηριδίων στον αντίστοιχο χρόνο με βάση τον πίνακα που συμπλήρωσαν στο προηγούμενο ερώτημα. Για την απάντηση στο ερώτημα αυτό υπενθυμίσαμε στα παιδιά ότι η εισαγωγή μεταβλητών χρειάζεται το πληκτρολόγιο στα Αγγλικά, για την αποφυγή τεχνικού κολλήματος.

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν αρκετά την εντολή 'Fill' (Γέμισμα) για να καταχωρήσουν γρήγορα τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής (χρόνος), ενώ διαπιστώθηκαν δυσκολίες στη δημιουργία σχέσεων για τη συμπλήρωση των εξαρτημένων στηλών. Γι' αυτές οι μαθητές προτίμησαν να καταχωρούν τις τιμές μία-μία. Με τη χρήση της εντολής 'Fill' (Γέμισμα), οι μαθητές «επικοινωνούν» με το λογισμικό μέσω ενός πλαισίου διαλόγου, επιλέγοντας το εύρος του πεδίου ορισμού και το βήμα των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στον τρόπο αυτό «επικοινωνίας», αναπτύσσεται ένας μαθηματικός διάλογος μεταξύ του μαθητή και του λογισμικού, μέσω του οποίου ο μαθητής καλείται να πάρει τις αποφάσεις του.

Μια ομάδα μαθητών σχετικά σχολιάζει:

M_1: Μπορούμε να το κάνουμε εύκολα, απλά πληκτρολογούμε τις τιμές.

Ε: Υπάρχει άλλη επιλογή για να το κάνεις αυτό;

M_2: Ναι, το πρόγραμμα μπορεί, έχει τέτοια εντολή…στον 'πίνακα'…Fill(γέμισμα)…από 0 έως 50…value (βήμα)…10…ok. Έτοιμο!

Ε: Για τον αριθμό των βακτηριδίων;

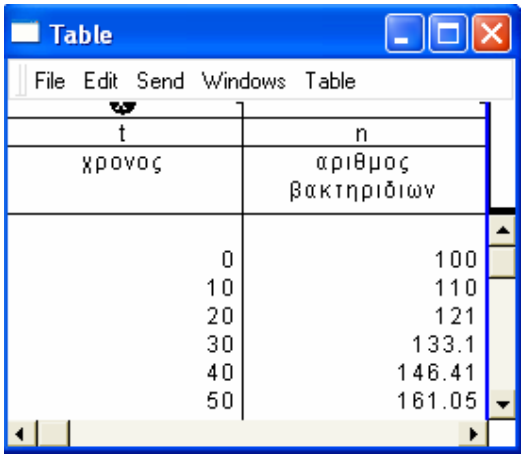
M_1: Το ίδιο…κάτι δεν πάει καλά!

M_3: …χάσαμε μια τιμή. Τι γίνεται; Καλύτερα ένα-ένα αυτά…πιο σίγουρα…κάτι δεν κάνουμε σωστά με την εντολή.

M_1: Κυρία πειράζει ένα-ένα;

Ε: Κανένα πρόβλημα, όπως εσείς το νιώθετε καλύτερα! Είναι σωστό.

Προτιμήθηκε να μην γίνει καμία παρέμβαση που αφορά σε τεχνικές δυσκολίες του λογισμικού, εξάλλου ο στόχος ήταν οι μαθητές να δημιουργήσουν τον πίνακα του ερωτήματος 2 στο παράθυρο 'Πίνακας' του λογισμικού, έτσι ώστε να σταλούν τα σημεία στο παράθυρο 'Γράφημα'.



t χρονος	n αριθμος βακτηριδιων
0	100
10	110
20	121
30	133.1
40	146.41
50	161.05

Εικόνα 6: Ο πίνακας μιας ομάδας για των αριθμό των βακτηριδίων στον αντίστοιχο χρόνο.

Στο τέταρτο ερώτημα ζητήθηκε να στείλουν τις δύο στήλες στο παράθυρο 'Γράφημα'.

M_1: Send points to graph. (στέλνει τα σημεία στο γράφημα.)

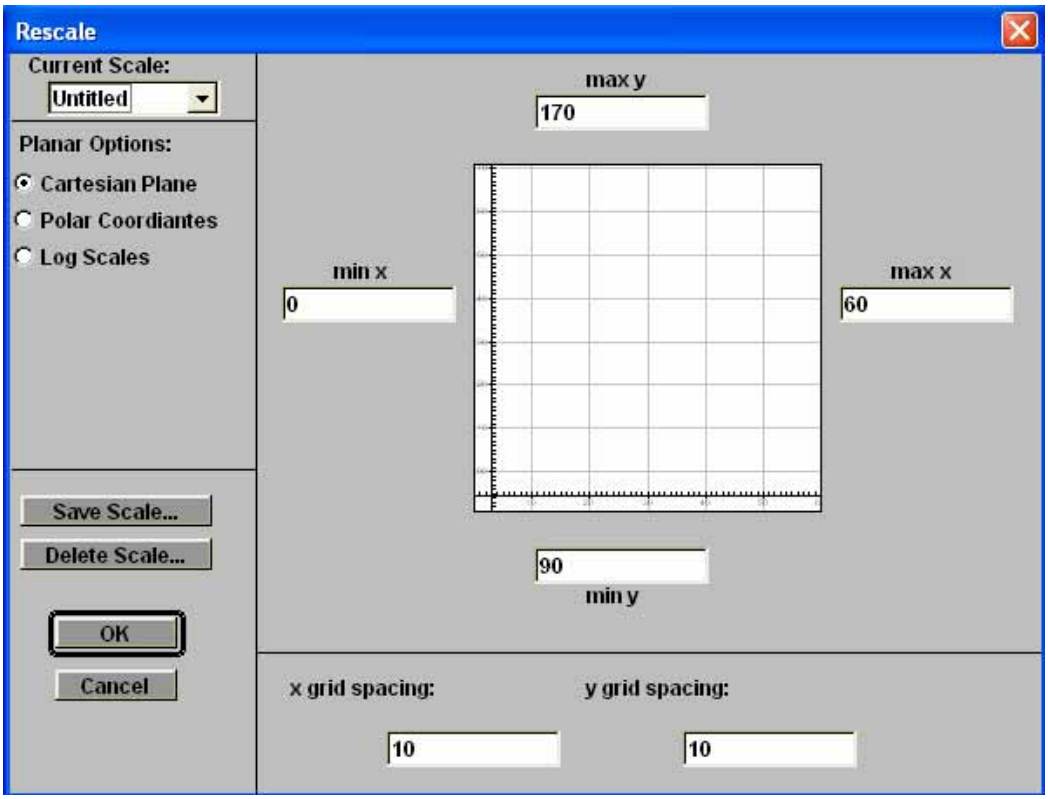
Ε: Ωραία.

M_2: Δε φαίνεται τίποτα!

Χρησιμοποίησαν την εντολή 'Rescale' ('αλλαγή κλίμακας') στην οθόνη εμφανίστηκε το παράθυρο της εικόνας 7.

Οι ομάδες των μαθητών βρήκαν το παράθυρο 'Γράφημα' πολύ εύχρηστο και λειτουργικό. Η αλλαγή κλίμακας (Rescale) που ήταν υποχρεωμένοι να κάνουν για να δουν σημεία ή γραφικές παραστάσεις αποδείχθηκε ένα σημαντικό εργαλείο μάθησης για τους μαθητές. Το λογισμικό δεν έχει δυνατότητα να αλλάζει αυτόματα την κλίμακα έτσι ώστε ο μαθητής να υποχρεωθεί να πάρει αποφάσεις γι' αυτήν. Με τον τρόπο αυτό τονίζεται η σπουδαιότητα της αξιολόγησης του εύρους τόσο του πεδίου ορισμού όσο και του συνόλου τιμών του γραφήματος.

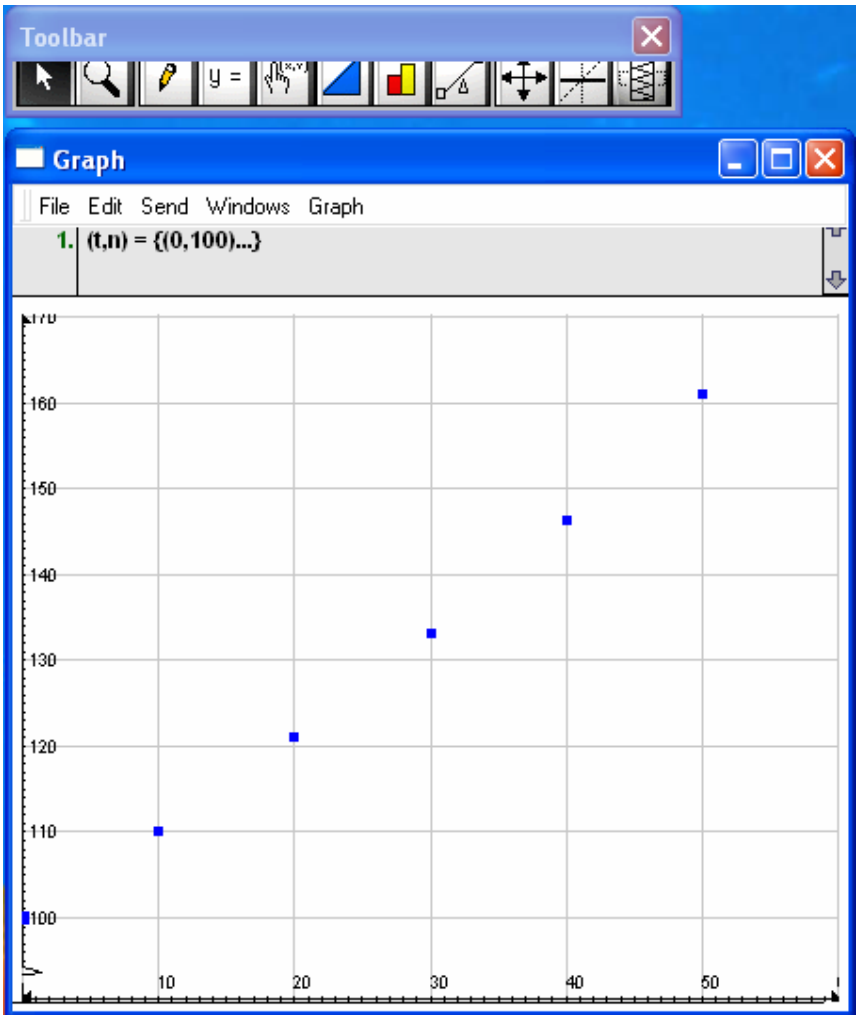
Χρειάστηκε η παρέμβαση της ερευνήτριας ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν το λόγο για τον οποίο δεν εμφανίστηκαν τα σημεία. Η σημαντικότερη δυσκολία στο πλαίσιο διαλόγου του 'Rescale' ήταν όταν στην οθόνη κάποιων ομάδων εμφανίστηκε η ένδειξη «To many grids» (Πολλές γραμμές πλέγματος) για κάποιον άξονα. (Η Αγγλική γλώσσα δυσκόλευε τους μαθητές να καταλάβουν το λάθος που είχαν κάνει.)



Εικόνα 7: Η εντολή 'Αλλαγή κλίμακας' από το παράθυρο 'Γράφημα'.

Ιδιαίτερα ευχάριστο ήταν όταν μια ομάδα μαθητών κατάλαβε πως για να διακρίνει αν η μεταβολή είναι γραμμική ή εκθετική ή κάτι άλλο, πρέπει να δώσει περισσότερες τιμές στον πίνακα. Η ευελιξία που έχει το πρόγραμμα να μεταβαίνει από την αναπαράσταση με μορφή πίνακα στη γραφική, χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα από τους μαθητές. Η Confrey (1989) αναφέρει σαν βασική επιδίωξη του λογισμικού την κατασκευή ανεξάρτητων νοημάτων για τις διάφορες αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Παράλληλα, οι Yackel, Cobb και Wood (1991), θεωρούν ότι, στα πλαίσια του Κονστρουκτιβισμού, οι μαθητές δεν μαθαίνουν μαθηματικά εσωτερικεύοντας προσεκτικά προετοιμασμένες και πλήρως οργανωμένες και παρουσιασμένες έννοιες και αλγόριθμους. Αντίθετα, μαθαίνουν μαθηματικά με την οργάνωση και την επανοργάνωση, από τους ίδιους, των δραστηριοτήτων και των εμπειριών τους.

Έτσι, όταν στην οθόνη του υπολογιστή εμφανίστηκε η γραφική παράσταση της εικόνας 8, ακολούθησε ο παρακάτω χαρακτηριστικός διάλογος:



Εικόνα 8

M_3: Μοιάζει με ευθεία…

M_2: Δεν μπορεί να είναι ευθεία.

Ε: Γιατί;

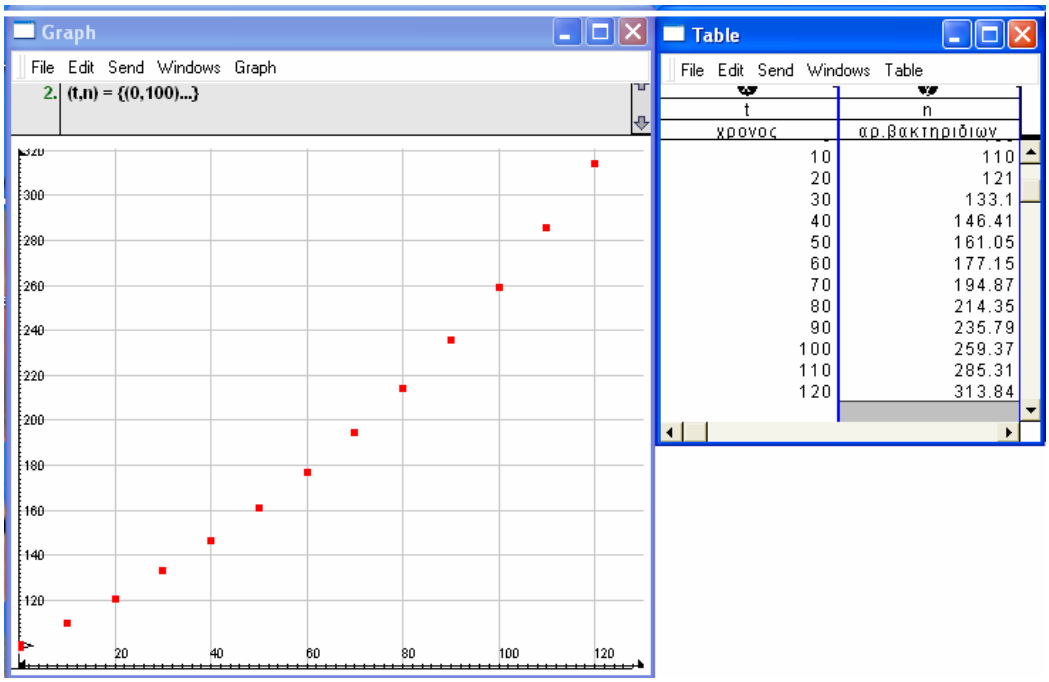
M_2: …η ευθεία είναι $y = ax+b$, αυτό όχι. Ο τύπος είναι αλλιώς…κάτι άλλο είναι. (εντωμεταξύ δείχνει στην ομάδα τις πράξεις στο δεύτερο ερώτημα για τον υπολογισμό των βακτηριδίων. *)*

M_1: Να στείλουμε κι άλλα σημεία…πιο πολλές τιμές…ίσως είναι καλύτερα.

M_2: Κυρία, πειράζει να βάλλουμε κι άλλα;

Ε: Δεν το ζητάει, αν όμως αυτό βοηθήσει, κανένα πρόβλημα. Ο πίνακας υπάρχει εκεί.

Δίνουν περισσότερες τιμές στις δύο στήλες του παραθύρου 'Πίνακας', χρησιμοποιώντας την 'αριθμομηχανή' για τις πράξεις τους και ξαναστέλνουν τα σημεία στο παράθυρο 'Γράφημα'. Στην εικόνα 9 φαίνεται η εργασία των μαθητών σε αυτό το σημείο.



Εικόνα 9: Ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση μιας ομάδας μαθητών.

M_2: Το ήξερα! Βλέπεις, δεν είναι ευθεία.

M_1: Ακολουθεί την εκθετική μεταβολή.

Στο πέμπτο ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές να δημιουργήσουν μια τρίτη στήλη στο παράθυρο 'Πίνακας' που να την ονομάσουν 'Υπολογισμός Βακτηριδίων' και η οποία να γεμίζει με βάση τον τύπο που νομίζουν ότι συνδέει το χρόνο (ανά 10 λεπτά) και τον αριθμό των βακτηριδίων. Όλες οι ομάδες σκέφτηκαν να γενικεύσουν και να χρησιμοποιήσουν τον αναδρομικό τύπο του ερωτήματος 2 ($B_t = (1.1)^t * B_0$, όπου $B_0 = 100$), τα αποτελέσματα όμως ήταν απογοητευτικά, δεν ήταν αυτά που είχαν υπολογίσει στη δεύτερη στήλη και αυτό προβληματίσε τους μαθητές.

Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα στην εξαγωγή του τύπου της εκθετικής μεταβολής, ενώ κάποιες ομάδες στάθηκε αδύνατο να το κάνουν από μόνες τους. Η σημαντικότερη δυσκολία ήταν ότι δεν κατανοούσαν πως σαν μονάδα μέτρησης του χρόνου παίρνουμε τα 10 λεπτά και όχι το 1 λεπτό. Χαρακτηριστικός είναι ο διάλογος που ακολουθεί:

M_3: Θα έπρεπε να βγαίνει το ίδιο, ε;

M_1: Εμ δε θα' πρεπε; Κάτι γίνεται. Κάτι κάνουμε λάθος, αλλά…αυτό θα έπρεπε να είναι…δεν ξέρω.

Στο σημείο αυτό ζητήθηκε βοήθεια από την ερευνήτρια. Σύμφωνα με τις εργασίες των Gaston Bachelard και Jean Piaget, η *κατασκευαστική* αντίληψη υποστηρίζει ότι το λάθος παίζει ένα ρόλο θεμελιακά διαφορετικό. Τα λάθη των μαθητών «μας ενδιαφέρουν», όσο είναι αποδοτικά για τη μάθηση. Το διδακτικό συμβόλαιο είναι λοιπόν κατά βάθος τροποποιήσιμο.

Το σφάλμα δεν είναι πάντα προφανές ή ορατό από τους μαθητές. Αυτό που πρέπει να τους διδάξουμε είναι η αναζήτηση του λάθους. Οι εκπαιδευτικοί έχουν πλήθος παιδαγωγικών επιλογών στη διάθεση τους για τον τρόπο που θα διαχειριστούν τα σφάλματα: να δρουν με αυτά ή να δρουν εναντίον τους ή να δρουν μέσω αυτών, να τα αποφεύγουν ή να τα εξαφανίζουν**.** Η χειρότερη επιλογή θα ήταν να τα αγνοήσουν.

Ε: Για να το δούμε μαζί. Το πιο σίγουρο είναι να καταλάβουμε τι μας δίνει ο τύπος.

$B_t = (1.1)^t * 100.$

M_1: Τον αριθμό των βακτηριδίων.

Ε: Σε σχέση με τι;

M_1: Με το χρόνο.

Ε: Ωραία! Θέλουμε τον αριθμό των βακτηριδίων στην αρχή της παρατήρησης να είναι 100;

M_2: Ναι, βάζουμε στον τύπο όπου t το 0 και βγαίνει.

Ε: Είναι αλήθεια. Μετά;

M_2: Θέλω τον αριθμό (των βακτηριδίων)μετά από 10 λεπτά…θα βάλω το 10.

Δοκιμάζει στο τετράδιο, ενώ κάποιος άλλος μαθητής κάνει τις πράξεις στην 'αριθμομηχανή'.

M_1: Δεν βγαίνει.

M_2: Κάτι γίνεται με το χρόνο…θα παίρναμε το ίδιο αν ήταν το 1.

Ε: Πώς το σκέφτηκες;

M_2: Πριν το κάναμε έτσι. (δείχνει τις πράξεις του ερωτήματος 2)

Ε: Στο βήμα 1° τι υπολογίσαμε;

M_1: Τον αριθμό των βακτηριδίων μετά τα 10 λεπτά.

Ε: Στο βήμα 2°;

M_1: Τον αριθμό των βακτηριδίων μετά από 20 λεπτά.

Ε: Τα βακτηρίδια είναι συναρτήσει του χρόνου έτσι; Μπορούμε να βάλουμε όπου t το 1; Τι θα μας έδινε τότε;

M_2: Τον αριθμό των βακτηριδίων μετά από 1 λεπτό…δεν το θέλουμε.

Ε: Οπότε;

M_2: Όπου t το 10.

M_1: Να βάλλουμε όπου t το 10, αλλά ο εκθέτης να κάνει 1, αυτό θα ήταν καλό.

Ε: Πώς θα μπορούσα να το είχα αυτό που θα ήταν ιδανικό;

M_2: t/10…δηλαδή $B_t = (1.1)^{t/10} * 100$…για να δούμε.

Πληκτρολογεί τον τύπο σε μια τρίτη στήλη του παραθύρου 'πίνακας'. Το λογισμικό βγάζει προειδοποιητικό μήνυμα ότι το γράμμα Β δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συμβολισμό μεταβλητής, έτσι επέλεξαν το k.

M_1: Αυτό είναι!

M_2: Δύσκολο κυρία! Πώς να το σκεφτούμε;

Ε: Να που το ανακαλύψατε! Μπράβο!

Η εργασία της ομάδας των μαθητών φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:

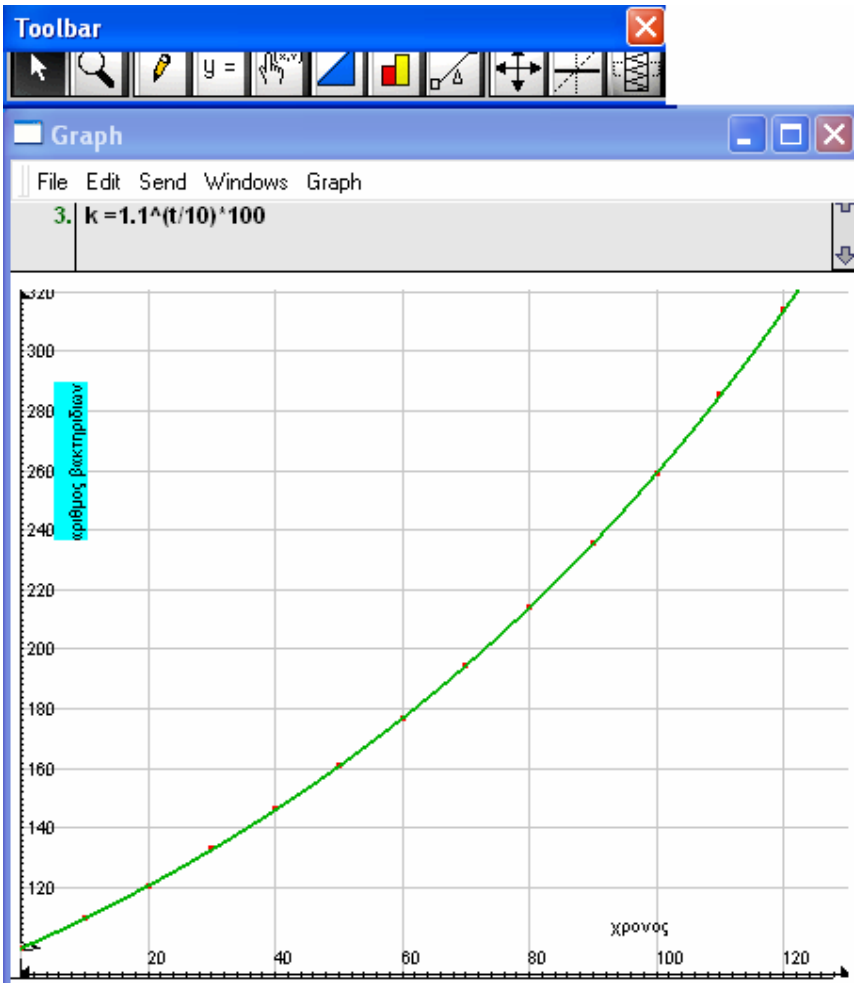
Table

File Edit Send Windows Table

t	n	k=1.1^(t/10)*100
χρονος	αριθμος βακτηριδιων	Υπολογισμος Βακτηριδιων
0	100	100
10	110	110
20	121	121
30	133.1	133.1
40	146.41	146.41
50	161.05	161.05
60	177.15	177.16
70	194.87	194.87
80	214.35	214.36
90	235.79	235.79
100	259.37	259.37
110	285.31	285.31
120	313.84	313.84

Εικόνα 10

Πληκτρολόγησαν τον τύπο της τρίτης στήλης στο παράθυρο ‘Γράφημα’, εμφανίστηκε η γραφική παράσταση και τα παιδιά επαλήθευσαν την εικασία που είχαν κάνει νωρίτερα ότι πρόκειται για εκθετική μεταβολή και γραφικά. Η ερευνήτρια βοήθησε τις ομάδες να δώσουν ονόματα στους άξονες με κατάλληλη επιλογή από το λογισμικό και στην οθόνη του υπολογιστή εμφανίστηκε:



Εικόνα 11

Ε: Φαίνεται να περνάει από τα σημεία που προϋπήρχαν, είναι έτσι;

M_1: Ακριβώς πάνω από αυτά!

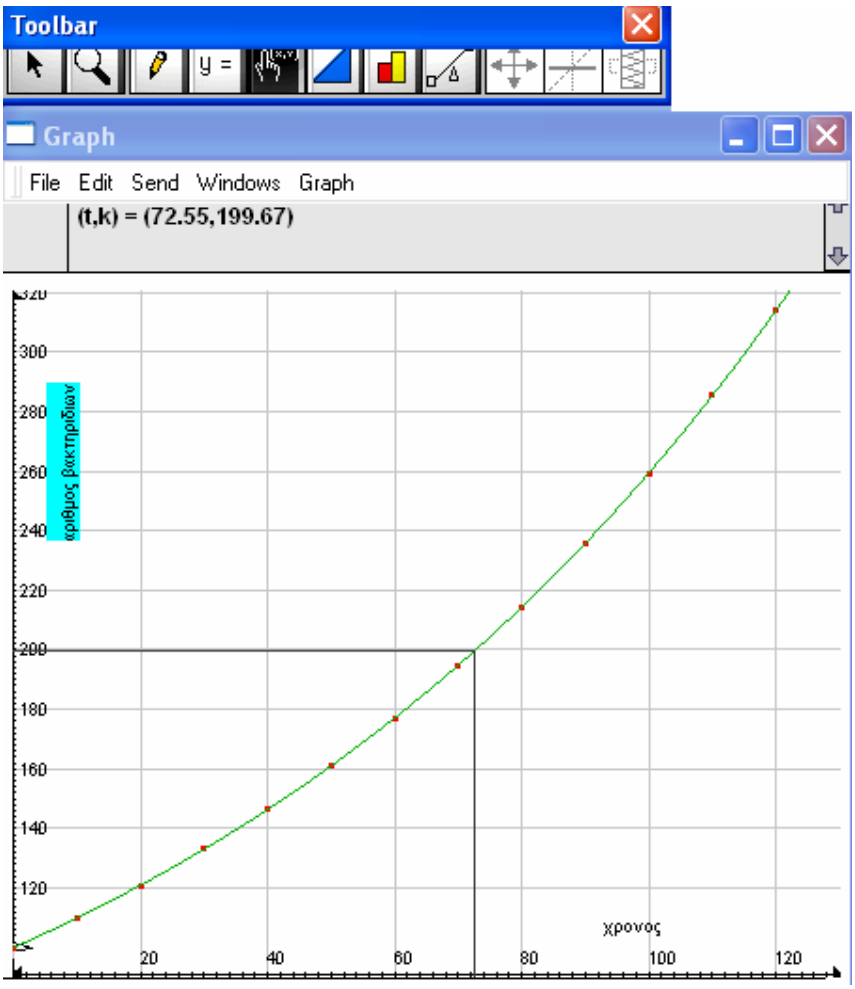
Ε: Πώς το εξηγείς αυτό;

M_1: Οι δύο στήλες έχουν τα ίδια νούμερα…είναι λογικό. Για παράδειγμα για t=20, δίνει 121 αριθμό βακτηριδίων και 121 βγαίνει και από τον υπολογισμό αυτών μέσω του τύπου.

Οι ομάδες των μαθητών χρησιμοποίησαν ευρύτατα την επικοινωνία των παραθύρων του λογισμικού, κάτι που γίνεται αντιληπτό και στην εργασία των μαθητών για την απάντηση στο επόμενο ερώτημα.

Στο ερώτημα 7, ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν με βάση τη γραφική παράσταση, μετά από πόση ώρα υπήρχαν στην καλλιέργεια λιγότερα από 200 βακτηρίδια και να επαληθεύσουν το αποτέλεσμα και στο παράθυρο 'Πίνακας'.

Επιλέγοντας από την εργαλειοθήκη στο παράθυρο ‘Γράφημα’ το εργαλείο δείκτη σημείου και σύροντας όσο χρειάστηκε το ποντίκι πάνω στη γραφική παράσταση, εντόπισαν τις συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου. Η εργασία μιας ομάδας φαίνεται στην εικόνα 12.



Εικόνα 12: Η λύση προβλήματος γραφικά από μια ομάδα μαθητών.

Για την επαλήθευση στο παράθυρο ‘Πίνακας’, πληκτρολόγησαν τον χρόνο 72,55 στη στήλη του χρόνου και το λογισμικό έδωσε άμεσα τον αριθμό των βακτηριδίων.

Σχετικά με την επικοινωνία των δύο παραθύρων στη φάση αυτή παρατηρήσαμε πως τα παιδία περιορίστηκαν στην πληκτρολόγηση της τιμής του χρόνου που έδωσε το λογισμικό στο παράθυρο γράφημα, στη στήλη του χρόνου στο παράθυρο ‘Πίνακας’. Καμία ομάδα δεν σκέφτηκε να δοκιμάσει άλλες τιμές στη στήλη του χρόνου στο παράθυρο ‘Πίνακας’ για μια πιο ‘καλή’ προσέγγιση, αν και υπήρξαν ομάδες που βρήκαν διαφορετικό αποτέλεσμα Οι μικρές αποκλίσεις στην τιμή του χρόνου από ομάδα σε ομάδα έδωσε την αφορμή να συζητηθεί το γεγονός ότι

η γραφική επίλυση είναι προσεγγιστική, ενώ η αλγεβρική ακριβής. Η εργασία μιας ομάδας στο παράθυρο 'Πίνακας' φαίνεται στην εικόνα 13.

Table

File Edit Send Windows Table

t	n	k=1.1^(t/10)*100
χρονος	αριθμος βακτηριδιων	Υπολογισμος Βακτηριδιων
0	100	100
10	110	110
20	121	121
30	133.1	133.1
40	146.41	146.41
50	161.05	161.05
60	177.15	177.16
70	194.87	194.87
80	214.35	214.36
90	235.79	235.79
100	259.37	259.37
110	285.31	285.31
120	313.84	313.84
72.55		199.67

Εικόνα 13: Η επαλήθευση του σημείου στο παράθυρο 'Πίνακας' από μια ομάδα μαθητών.

Στο ερώτημα 8, έγινε προσπάθεια οι μαθητές να καταλάβουν τι αλλάζει στον αρχικό τύπο σύμφωνα με το νέο ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των βακτηριδίων. Υπήρξαν ομάδες που ανταποκρίθηκαν εύκολα και άλλες που χρειάστηκαν μεγαλύτερη βοήθεια από την ερευνήτρια .

Για την απάντηση στο ερώτημα αυτό, οι μαθητές εργάστηκαν αρχικά στο τετράδιο τους για την εξαγωγή του αναδρομικού τύπου. Ο αρχικός στόχος ήταν τα παιδία να αναλογιστούν τι είχαν κάνει ως τώρα ώστε να προσαρμόσουν τον αναδρομικό τύπο που είχαν ήδη κατασκευάσει με βάση τα νέα δεδομένα. Ο στόχος αυτός δεν κατακτήθηκε από όλες τις ομάδες. Χαρακτηριστικοί είναι οι παρακάτω διάλογοι:

M_2: ...τώρα αυξάνονται κατά 20! κάθε 10 λεπτά

Ε: Τι έχει αλλάξει σε σχέση με πριν;

M_1: Το ποσοστό αύξησης, τα άλλα είναι ίδια.

M_2: Θα κάνουμε το ίδιο με πριν, αλλά τώρα θα έχουμε το 20.

Εντωμεταξύ έχει αρχίσει να κάνει πράξεις στο τετράδιο…

M_3: Θα αυξάνεται πάλι εκθετικά.

Ε: Πώς το κατάλαβες αυτό από τα δεδομένα του προβλήματος;

M_3: Είναι η ίδια εκφώνηση με πριν, μόνο που αντί για 10% έχω 20%...θα πρέπει να βγαίνει το ίδιο.

…….

Μια άλλη ομάδα:

M_1: Το ποσοστό αύξησης είναι πάλι σταθερό, αλλά είναι 20% τώρα.

Ε: Τι εκφράζει το ποσοστό;

M_1: Το ρυθμό αύξησης…

M_2: Δηλαδή…ποσοστό σταθερό…ρυθμός αύξησης σταθερός, άρα εκθετική μεταβολή.

Ε: Πολύ καλά! Ο προηγούμενος τύπος πώς θα μεταβληθεί τώρα;

*M_3: ...τώρα θα πολλαπλασιάζω κάθε τιμή με 1+20/100 = 1,2…στην αρχή έχω 100 πάλι, άρα το 1,1 θα γίνει 1,2…ο χρόνος 10 λεπτά… τίποτε άλλο. Δηλαδή $(1,2)^{t/10}$*100.*

Στη φάση αυτή η ερευνήτρια βοήθησε και τις υπόλοιπες ομάδες να οδηγηθούν στην ανακάλυψη αυτού που αλλάζει στον προηγούμενο τύπο και να καταλάβουν πως δεν είναι απαραίτητο να εργαστούν ξανά βήμα βήμα από την αρχή. Η εργασία της ομάδας εστίασης φαίνεται στην εικόνα 14.

Table

File Edit Send Windows Table

t χρονος	n αριθμος βακτηριδιων	k=1.1^(t/10)*100 Υπολογισμος Βακτηριδιων	u=1.2^(t/10)*100 Νεος Υπολογισμος Βακτηριδιων
0	100	100	100
10	110	110	120
20	121	121	144
30	133.1	133.1	172.8
40	146.41	146.41	207.36
50	161.05	161.05	248.83
60	177.15	177.16	298.6
70	194.87	194.87	358.32
80	214.35	214.36	429.98
90	235.79	235.79	515.98
100	259.37	259.37	619.17
110	285.31	285.31	743.01
120	313.84	313.84	891.61

Εικόνα 14

Στο τελευταίο ερώτημα ζητήθηκε από τις ομάδες μαθητών να συγκρίνουν τις δύο γραφικές παραστάσεις και να εξάγουν συμπεράσματα. Τα παιδιά πληκτρολόγησαν το νέο τύπο στο παράθυρο 'Γράφημα' και πήραν στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση (εικόνα 15). Η δυνατότητα του λογισμικού να δίνει στο μαθητή την ευκαιρία να βλέπει στο ίδιο σύστημα αξόνων δύο ή και περισσότερες γραφικές παραστάσεις γρήγορα, χωρίς να απαιτεί ιδιαίτερες καλλιτεχνικές δεξιότητες από αυτόν, έχει ως αποτέλεσμα ο μαθητής να εστιάζει σε ουσιαστικά σημεία της δραστηριότητας και να αποκομίζει γνώσεις που κατά τον παραδοσιακό τρόπο παρουσίασης του μαθήματος είναι δύσκολο έως και αδύνατο να επιτευχθεί.

Ε: Τι παρατηρούμε σε σχέση με την αρχική γραφική παράσταση;

M_1: Είναι πιο κλειστή.

Ε: Πού πιστεύετε οφείλεται αυτό;

M_2: Στην αλλαγή που κάναμε στον τύπο…αλλάζει ο τύπος, αλλάζει η γραφική παράσταση…λογικό κυρία.

Ε: Τι ήταν αυτό που άλλαξε στον τύπο;

M_3: Το ποσοστό.

M_2: …δηλαδή ο ρυθμός αύξησης, έγινε μεγαλύτερος.

M_1:…μεγαλύτερος ρυθμός αύξησης πιο απότομη κλίση στο γράφημα, αυτό είναι το συμπέρασμα.

Ε: Δηλαδή αν τα βακτηρίδια αυξάνονται κάθε 10 λεπτά και παράγονται 32%;

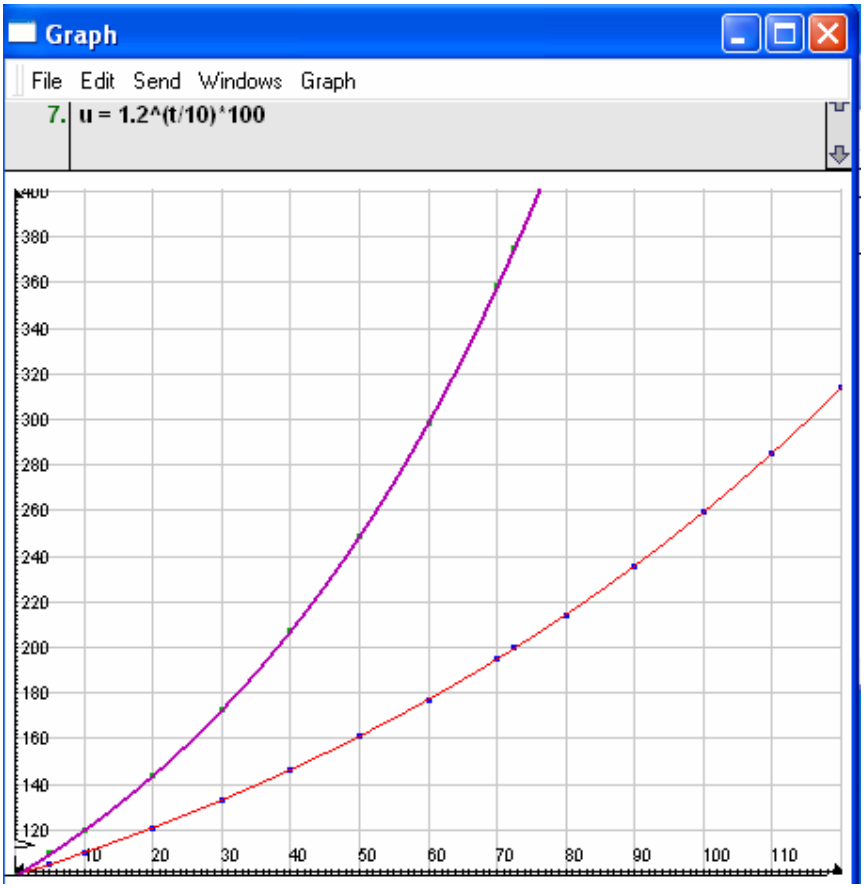
M_3: Ακόμα πιο απότομη κλίση.

M_2: Η κλίση της γραφικής παράστασης εξαρτάται από το ποσοστό.

Ε: ...και αν ο ρυθμός αύξησης είναι σταθερός και ίσος με 5%, τι θα περιμένω να δω στη γραφική παράσταση;

M_1:...πιο ανοιχτή από την αρχική.

Ε: Τέλεια!



Εικόνα 15: Οι γραφικές παραστάσεις των δύο εκθετικών μεταβολών στο ίδιο σύστημα αξόνων από μια ομάδα μαθητών.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό πως οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν ότι η αλλαγή στο ρυθμό μεταβολής (και άρα η αλλαγή στον τύπο της συνάρτησης) επιφέρει αλλαγές και στη γραφική παράσταση, όπου και το επιβεβαίωσαν. Συνέδεσαν την κλίση του γραφήματος με το ρυθμό μεταβολής («*...μεγαλύτερος ρυθμός αύξησης πιο απότομη κλίση στο γράφημα, αυτό είναι το συμπέρασμα.»).*

ΜΕΡΟΣ 4ο

ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{ο}

7. Γενικά συμπεράσματα- Συζήτηση.

Η έρευνα αυτή περιλαμβάνει την υλοποίηση ενός εκπαιδευτικού σεναρίου με αντικείμενο το νόμο της εκθετικής μεταβολής. Το σενάριο αυτό ενέχει μια σειρά εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων με χρήση του λογισμικού Function Probe. Οι δραστηριότητες αυτές αναδεικνύουν τη δυναμική μιας πραγματικής κατάστασης και τη χρησιμότητα των παραγόμενων μαθηματικών εννοιών. Το ενδιαφέρον μας εστιάστηκε στη μελέτη της πορείας της διεξαγωγής της εκπαιδευτικής δραστηριότητας σε πραγματικές σχολικές συνθήκες και στον εντοπισμό των κυριότερων παραγόντων, οι οποίοι επηρεάζουν τη διδακτική και τη μαθησιακή διαδικασία. Ειδικότερα το ενδιαφέρον μας εστιάστηκε:

1. στα επιμέρους χαρακτηριστικά της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας που αναπτύχθηκε κατά την εφαρμογή της δραστηριότητας και
2. στο ρόλο του λογισμικού στη μαθησιακή διαδικασία.

Τα συμπεράσματα της έρευνας συνοψίζονται στα ακόλουθα:

7.1 Η συνεργασία των μαθητών.

Όπως προαναφέραμε, οι μαθητές δούλεψαν σε ομάδες των τριών ατόμων. Οι μαθητές της τάξης αυτής δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία σε ένα τέτοιο μαθησιακό περιβάλλον για τα μαθηματικά, με αποτέλεσμα να μην έχουν σαφή αντίληψη ότι κάνουν μαθηματικά με την έννοια που αυτοί αποδίδουν στον όρο «κάνω μαθηματικά». Σχετική με αυτό είναι η παρατήρησή μας ότι η εργασία των μαθητών σε πολλές περιπτώσεις δεν είχε ερευνητικό χαρακτήρα. Συγκεκριμένα, υπήρξαν στιγμές όπου ομάδες μαθητών συζητούσαν για άσχετα πράγματα όσο διάστημα δεν υπήρχε πάνω από την ομάδα η ερευνήτρια. Γενικά όμως οι μαθητές δούλεψαν αρμονικά μεταξύ τους. Δεν παρατηρήθηκαν φαινόμενα έντονου διαπληκτισμού και αναζήτησης ρόλου μέσα στην ομάδα. Οι μαθητές συζητούσαν μεταξύ τους το πρόβλημα και πρόσφερε ο ένας στον άλλον εποικοδομητική κριτική.

Η λύση του μαθηματικού προβλήματος με τη χρήση του Function Probe αποτέλεσε κοινό μαθησιακό στόχο με αποτέλεσμα να υπάρξει συνεργατική προσπάθεια εκ μέρους των μαθητών και ομαδικό αποτέλεσμα. Υπήρξε μια συνεχής αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών της ομάδας η οποία εκδηλώθηκε ως αμοιβαία βοήθεια, αμοιβαίος επηρεασμός, ενίσχυση και ενθάρρυνση, προσφορά γνώσεων και πληροφοριών (Johnson, Johnson & Holubec, 1990).

Έτσι, στα πλαίσια της ομαδικής εργασίας αναπτύχθηκε το αίσθημα της θετικής αλληλεξάρτησης, είχαμε κάποιο είδος «ανεξαρτησίας» από την εκπαιδευτικό, αφού οι ομάδες είχαν υψηλό βαθμό αυτονομίας και συγχρόνως αναπτύχθηκε αίσθημα προσωπικής ευθύνης, αφού ο κάθε μαθητής επιδίωξε να μάθει ο ίδιος και προσπάθησε να ελέγξει αν τα υπόλοιπα μέλη μαθαίνουν.

Θέλουμε να πιστεύουμε πως συμβάλαμε στην αύξηση της αυτοπεποίθησης του μαθητή, εφόσον ένιωσε ενεργό μέλος μιας ομάδας με άποψη και με προσφορά για την επίτευξη του κοινού στόχου.

Η εφαρμογή της μεθόδου της εργασίας σε ομάδες ήταν αρκετά δύσκολη. Τα προβλήματα που αντιμετωπίσαμε οφείλονται στο ότι τα παιδιά δεν διδάσκονται συνεργατικές δεξιότητες ώστε στη συνέχεια να ασκούνται μέσα στην ομάδα για την εφαρμογή τους και αυτό διότι η συνεργατική μάθηση δεν είναι αναγνωρισμένη από το υπάρχον σχολικό σύστημα ως ουσιαστική μέθοδος μάθησης. Ως απόρροια αυτού ήταν τόσο το χρονοβόρο της διαδικασίας, όσο και η απόσπαση της προσοχής των μαθητών προς άσχετα θέματα, πράγμα που δεν τους επέτρεπε να αξιοποιούν πλήρως το χρόνο τους στο διδακτικό έργο.

7.2 Ο ρόλος του λογισμικού στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Η ανάπτυξη κατάλληλων διδακτικών δραστηριοτήτων σε ένα ενεργητικό διερευνητικό περιβάλλον μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κινηθούν από τον επαγωγικό χαρακτήρα του λογισμικού στον παραγωγικό χαρακτήρα της διαδικασίας της μαθηματικής απόδειξης, με την κατάλληλη αξιοποίηση των εργαλείων προγραμματισμού και τη δυνατότητα για διερεύνηση, επιβεβαίωση και επαλήθευση για μετάβαση στην τυπική μαθηματική απόδειξη (Noss et al., 1997).

Το Function Probe ανήκει στην κατηγορία των λογισμικών πολλαπλών αναπαραστάσεων και χρησιμοποιείται για τη μελέτη και διερεύνηση των συναρτήσεων. Η φιλοσοφία του βασίζεται σε αυτό που καλούμε «μαθητοκεντρικός σχεδιασμός» (student centered design), δηλαδή ο σχεδιασμός που έχει βασιστεί στις παρατηρούμενες ενέργειες των μαθητών όταν επιλύουν προβλήματα (Confrey & Smith, 1988). Το λογισμικό συνθέτουν τρία διαφορετικά παράθυρα που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, ενώ δίνεται συγχρόνως η δυνατότητα αποστολής δεδομένων από το ένα στο άλλο. Με τον τρόπο αυτό γίνεται δυνατή η εύκολη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης (συμβολική, γραφική, πίνακας τιμών) της συνάρτησης στην άλλη. Για το λόγο αυτό παρουσιάζουμε τα ευρήματα που ακολουθούν, αρχικά ως προς το κάθε παράθυρο του λογισμικού ξεχωριστά και στη συνέχεια εκείνα τα οποία αφορούν στην επικοινωνία των παραθύρων.

Χρήση του παραθύρου 'Πίνακας'.

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν αυτό το παράθυρο χωρίς καμία δυσκολία κυρίως:

- για να καταχωρήσουν τα δεδομένα τους,
- για να οργανώσουν τις πληροφορίες του προβλήματος,
- για να παρατηρήσουν τις συσχετίσεις μεταξύ των αριθμητικών δεδομένων μιας στήλης καθώς και αυτές μεταξύ δύο διαφορετικών στηλών.

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν αρκετά την εντολή 'Fill' (Γέμισμα) για να καταχωρήσουν γρήγορα τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής (χρόνος), ενώ διαπιστώθηκαν δυσκολίες στη δημιουργία σχέσεων για τη συμπλήρωση των

εξαρτημένων στηλών πρόβλημα που συνδέεται άμεσα με τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να διακρίνουν την ανεξάρτητη από την εξαρτημένη μεταβλητή, καθώς και στο να βρουν τις μαθηματικές σχέσεις που τις συνδέουν. Γι' αυτές οι μαθητές προτίμησαν να καταχωρούν τις τιμές μία-μία. Με τη χρήση της εντολής 'Fill' (Γέμισμα), οι μαθητές «επικοινωνούν» με το λογισμικό μέσω ενός πλαισίου διαλόγου, επιλέγοντας το εύρος του πεδίου ορισμού και το βήμα των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στον τρόπο αυτό «επικοινωνίας», αναπτύσσεται ένας μαθηματικός διάλογος μεταξύ του μαθητή και του λογισμικού, μέσω του οποίου ο μαθητής καλείται να πάρει τις αποφάσεις του.

Χρήση του παραθύρου 'Γράφημα'.

Οι ομάδες των μαθητών βρήκαν το παράθυρο 'Γράφημα' πολύ εύχρηστο και λειτουργικό. Αρχικά οι μαθητές είχαν την εντύπωση ότι το λογισμικό δεν εκτελούσε την εντολή «send points to graph» (Αποστολή σημείων στο γράφημα) γιατί το παράθυρο του γραφήματος έμενε κενό. Οι μαθητές, συνηθισμένοι στον τρόπο με τον οποίο σχεδιάζουν στο τετράδιο τους ένα γράφημα, παρέμεναν με την εντύπωση πως οποιεσδήποτε και αν είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου, αυτό θα εμφανιστεί στην οθόνη. Με την παρέμβαση της διδάσκουσας, οι μαθητές κατανόησαν το λόγο για τον οποίο δεν εμφανίστηκαν τα σημεία.

Η αλλαγή κλίμακας (Rescale) που ήταν υποχρεωμένοι να κάνουν για να δουν σημεία ή γραφικές παραστάσεις αποδείχθηκε ένα σημαντικό εργαλείο μάθησης για τους μαθητές. Το λογισμικό δεν έχει δυνατότητα να αλλάζει αυτόματα την κλίμακα έτσι ώστε ο μαθητής να υποχρεωθεί να πάρει αποφάσεις γι' αυτήν. Με τον τρόπο αυτό τονίζεται η σπουδαιότητα της αξιολόγησης του εύρους τόσο του πεδίου ορισμού όσο και του συνόλου τιμών του γραφήματος. Η σημαντικότερη δυσκολία στο πλαίσιο διαλόγου του 'Rescale' ήταν όταν στην οθόνη κάποιων ομάδων εμφανίστηκε η ένδειξη «To many grids» (Πολλές γραμμές πλέγματος) για κάποιον άξονα. (Η Αγγλική γλώσσα δυσκόλευε τους μαθητές να καταλάβουν το λάθος που είχαν κάνει.)

Χρήση του παραθύρου 'Αριθμομηχανή'.

Το παράθυρο αυτό χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές κυρίως ως εργαλείο για εκτέλεση βασικών υπολογισμών.

Η κατασκευή κουμπιού δυσκόλεψε αρκετά τους μαθητές. Υπήρξαν ομάδες στις οποίες στάθηκε αδύνατο να κατασκευάσουν οι μαθητές κουμπί. Σε σχετικές ερωτήσεις οι μαθητές αυτοί απαντούσαν ότι δεν καταλαβαίνουν γιατί είναι απαραίτητο να το κάνουν, αφού η εύρεση του αριθμού των βακτηριδίων γίνεται εύκολα κάνοντας πράξεις. Στην ομάδα εστίασης η ερευνήτρια υποχρεώθηκε να δώσει αναλυτικές υποδείξεις στους μαθητές για να κατασκευάσουν το κουμπί που θα τους

έδινε τον αριθμό των βακτηριδίων. Η κατασκευή κουμπιού κατά την Confrey (μία εκ των δημιουργών του λογισμικού) (1989) είναι μία νέα αναπαράσταση της συνάρτησης, η οποία υπογραμμίζει την αντίληψη της συνάρτησης σαν τη γενίκευση μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας.

Επικοινωνία των παραθύρων:

'Γράφημα'- 'Πίνακας', 'Πίνακας'- 'Αριθμομηχανή'

Η ευελιξία που έχει το πρόγραμμα να μεταβαίνει από την αναπαράσταση με μορφή πίνακα στη γραφική, χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα από τους μαθητές. Η Confrey (1989) αναφέρει σαν βασική επιδίωξη του λογισμικού την κατασκευή ανεξάρτητων νοημάτων για τις διάφορες αναπαραστάσεις της συνάρτησης.

Αντίθετα, η επικοινωνία των παραθύρων 'Πίνακας', 'Αριθμομηχανή' περιορίστηκε στην εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων και την καταγραφή του αποτελέσματος σε στήλες του 'Πίνακα' μια και η κατασκευή και η χρήση του κουμπιού στάθηκε δύσκολη έως και αδύνατη.

Ο ρόλος των τεχνικών χαρακτηριστικών και των δυσλειτουργιών του λογισμικού στη μαθησιακή διαδικασία

Παρότι το Function Probe είναι εύχρηστο λογισμικό και οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν να συνηθίσουν στη χρήση του σε ικανοποιητικό βαθμό, υπήρξαν ορισμένα τεχνικά χαρακτηριστικά του λογισμικού, καθώς και κάποιες δυσλειτουργίες του, που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της δραστηριότητας. Ήταν σημαντικές αιτίες για φαινόμενα έντονης καθυστέρησης της εργασίας των μαθητών, προσωρινής παραίτησης και ειρωνικών σχολίων εκ μέρους τους

7.3 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη μαθησιακή διαδικασία.

Κάθε δάσκαλος που αποδέχεται τις αρχές του κονστρουκτιβισμού, πρέπει να δει με έναν διαφορετικό τρόπο τη θέση και το ρόλο του μέσα στην τάξη. Ένα μεγάλο μέρος της υπευθυνότητας του δασκάλου των μαθηματικών είναι ο σχεδιασμός των κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων. Ίδια επιδίωξη είχε και η γράφουσα για τις δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία. Μέσω αυτού του σχεδιασμού έγινε προσπάθεια οι δραστηριότητες που προτάθηκαν να ωθήσουν το μαθητή στην αναζήτηση της κατάλληλης απάντησης μέσα από ένα ευρύ φάσμα επιλογών και όχι μια συγκεκριμένη και τυποποιημένη.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης και ιδιαίτερα κατά τη λύση προβλήματος, επιδιώχθηκε οι παρεμβάσεις της διδάσκουσας να είναι τέτοιες ώστε έμμεσα να κατευθύνεται η προσοχή των μαθητών στα σημεία της δραστηριότητας

που θα τους οδηγήσουν στην αποκάλυψη μαθηματικών νοημάτων και σχέσεων. Ο ρόλος της περιορίστηκε σε αυτόν του συμμετοχικού παρατηρητή.

Η ανάπτυξη εικασιών και υποθέσεων από τους μαθητές και η τάση για τον έλεγχό τους είναι ένα σαφές μήνυμα ότι έχουν αρχίσει να διαμορφώνουν την ενεργητική και ερευνητική στάση ως προς τα μαθηματικά. Μόνον αφού έχουν βρει τα δικά τους αποτελέσματα και έχουν αναπτύξει τις εικασίες τους, οι μαθητές αρχίζουν να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα της γενίκευσης και της απόδειξης**.** Για την ακρίβεια, όταν οι μαθητές βρουν τα δικά τους αποτελέσματα, τότε η απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί σημαντική, γιατί τότε έχουμε ανάγκη να πειστούμε για πράγματα που δεν είμαστε βέβαιοι ενώ στις περισσότερες περιπτώσεις στο σχολείο παρουσιάζονται αποδείξεις για αποτελέσματα που οι μαθητές θεωρούν ότι κανείς δεν μπορεί να έχει αμφιβολία!

Στα πλαίσια αυτά, κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας η διδάσκουσα αποποιήθηκε το ρόλο της «αυθεντίας» που κατέχει τις περισσότερες φορές ο εκπαιδευτικός στο παραδοσιακό σχολείο. Πολλές φορές οι προτάσεις των μαθητών ή οι λύσεις στις οποίες καταλήγουν διαφέρουν ριζικά από την ατζέντα που έχει στο μυαλό του ο δάσκαλος. Σε αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να είναι πάντα έτοιμος και πρόθυμος να διαπραγματευτεί με τους μαθητές, να τροποποιήσει ή ακόμη και να απορρίψει κάποια πιστεύω του, προκειμένου όλοι μαζί να καταλήξουν σε λύσεις κοινά αποδεκτές.

Είναι σπουδαίο, κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης, ο μαθητής να μπορεί να μοιράζεται τις εμπειρίες του με αυτές του δασκάλου. Αυτό επιτρέπει στο παιδί να μάθει από τον ενήλικα όχι «κάνοντας αυτό που λέει ο δάσκαλος» αλλά «κάνοντας αυτό που κάνει ο δάσκαλος» και ένα από τα πράγματα που κάνει ο δάσκαλος είναι να κυνηγήσει το πρόβλημα μέχρι να γίνει απόλυτα κατανοητό (S. Papert, 1980, M. Donaldson, 1984, M. Hughes, 1986,). Παράλληλα, ο δάσκαλος αναγνωρίζει ότι δεν διδάσκει τους μαθητές μαθηματικά, αλλά τους διδάσκει πώς να αναπτύξουν τη γνώση τους (Confrey, 1990).Ο δάσκαλος είναι ταυτόχρονα και μαθητής στη διαδικασία της διδακτικής πράξης (Steffe and Ambrosio, 1995).

7.4 Γενικά συμπεράσματα

Μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά του λογισμικού που προσπαθήσαμε να αξιοποιήσουμε σε αυτή τη δραστηριότητα όπως:

1. η δυνατότητα πολλαπλής αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης,
2. η δυνατότητα εύκολης μετάβασης από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη,
3. η δυνατότητα για την κατασκευή ανεξάρτητων νοημάτων για τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης αλλά και συσχετισμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων,

4. η δυνατότητα καταχώρησης, οργάνωσης και επεξεργασίας των δεδομένων ως αποτέλεσμα μετρήσεων ή πληροφοριών ενός προβλήματος και
5. η δυνατότητα συσχετίσεων αριθμητικών δεδομένων,

φαίνεται να λειτούργησαν στις περισσότερες περιπτώσεις προς θετική κατεύθυνση δημιουργώντας συνθήκες για αυτενέργεια των μαθητών, πειραματισμό, ενίσχυση των διαισθητικών τους αντιλήψεων και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Βασικό ρόλο προς την κατεύθυνση αυτή έπαιξε ο προσεκτικός σχεδιασμός του λογισμικού, που δεν επιτρέπει την αυτοματοποίηση των ενεργειών του μαθητή, αλλά τον ενθαρρύνει να «επικοινωνήσει» με το λογισμικό μέσα από μαθηματικούς όρους και διαδικασίες. Με αυτό τον τρόπο υπογραμμίζεται η ύπαρξη μιας σαφούς διαχωριστικής γραμμής ανάμεσα στο Function Probe, που είναι σχεδιασμένο ώστε να ενθαρρύνει τις προσπάθειες των μαθητών για μια κατασκευαστική προσέγγιση της γνώσης εξερευνώντας και λύνοντας προβλήματα, και σε άλλα λογισμικά τα οποία την περιορίζουν ή αρνούνται να δώσουν την ευκαιρία για μια τέτοια εξερεύνηση.

Προς αυτή την κατεύθυνση είναι και η διαπίστωση μας ότι ένα σημαντικό μέρος των δυσκολιών αντίληψης της λειτουργίας του λογισμικού συνδέεται άμεσα με το επίπεδο και το είδος κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών εκ μέρους των μαθητών.

Σε ένα μαθησιακό περιβάλλον σαν αυτό που διεξήχθη η εκπαιδευτική δραστηριότητα και όπου η χρήση διερευνητικού λογισμικού είναι καταλυτική, η γνώση της χρήσης του υπολογιστή δεν είναι αρκετή.

Ο διδάσκων θα πρέπει να κατέχει τη φιλοσοφία η οποία διατρέχει το λογισμικό, να είναι εξοικειωμένος ακόμη και με τις αδυναμίες του λογισμικού και η δραστηριότητα που θα σχεδιάσει να αξιοποιεί τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τις δυνατότητες του λογισμικού και να λαμβάνει υπόψη του τις δυνατότητες-ιδιαιτερότητες των μαθητών της τάξης του.

Επιπροσθέτως, μέσα σε αυτό το πλαίσιο, η ερευνητική στάση των μαθητών και η συνεργασία τους σε ομάδες απαιτεί την αναπροσαρμογή της διδακτικής πρακτικής του διδάσκοντος έτσι ώστε ο παρεμβατικός του ρόλος στη μαθησιακή διαδικασία να εναρμονίζεται και να υπαγορεύεται από τις ενέργειες των μαθητών.

Τέλος, για την εφαρμογή μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας που έχει σχεδιαστεί να διεξαχθεί σε περιβάλλον διαφορετικό από αυτό της παραδοσιακής διδασκαλίας, απαιτείται δέσμη προπαρασκευαστικών και υποστηρικτικών ενεργειών με κυρίαρχες αυτές της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών και της διαρκούς υποστήριξης τους στο έργο τους

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αναπολιτάνος Δ., *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών.* Εκδ. Νεφέλη, Αθήνα 1985.
- Ασβεστά Α., & Γαγάτσης Α., 1995, *Προβλήματα ερμηνείας και η έννοια της συνάρτησης*, Στο Α. Γαγάτση (Εκδ.), Διδακτική και Ιστορία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.
- Βασάκος Θ.(1995), *Η έννοια της Συνάρτησης στους μαθητές του Λυκείου και Ενέργειες κατανόησης- εμπόδια που σχετίζονται με τον ορισμό της συνάρτησης*, Στο Α. Γαγάτση (Εκδ.), Διδακτική και Ιστορία των Μαθηματικών:Θεωρία-Έρευνα, Θεσσαλονίκη: Art of text.
- Bork Alfred, *"Technology in Education: An Historical Perspective"*, Univ. of Ca, Irvine.
- Brousseau G., *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques*, RDM Vol. 4 $n^0$2, 1983.
- Brousseau G., Fondements et methodes de la didactique des mathematiques, RDM, 1983.
- Βρύζας, Κ. (1990), *«Μέσα επικοινωνίας και εκπαίδευσης»*, Σύγχρονη Εκπαίδευση τεύχ. 51, Μαρτ-Απρ. 1990, σ. 77-89.
- Γαγάτσης Α., Σπύρου Π., Ευαγγελίδου Α., Ηλία Ι., (2004). *Αντιλήψεις δευτεροετών φοιτητών τμήματος Επιστημών της Αγωγής για την έννοια της συνάρτησης: εμπόδια στην κατανόηση και αλλαγές μετά τη διδασκαλία.*
- Γαγάτσης Α., Μιχαηλίδου Ε., Σιακαλλή Μ. (Λευκωσία, 2000). *Συναρτήσεις, ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης.*
- Cobb P. & Yackel E., *" Constructivist, emergent and sociocultural perspectives in the context of denelopmental research"*, Journal of Educational Psychology, vol. 31, p. 175-190, 1996.
- Cobb P. & Yackel E.& Wood T., *"Interaction and learning in mathematics classroom sityations"*, Educational Studies in Mathematics, vol. 23, p. 99-122, 1992.
- Confrey J.,Final project report: *The Use of Contextual Problems and multi-Representational software to teach the Concept of fanctions*, Cornell University.
- Confrey J., *Learning about fanctions through problem-solving*. A problem-solving manual for use with Function Probe, University of Texas at Austin, Austin, Texas, 1999.
- Confrey J. & Smith E., «Student centered design for educational software». *Proceedings of the 1st Annual Conference on Technology in Collegiate Mathematics,* Addison-Wesley, Columbus, OH, October 27-29, 1988.
- Confrey J., «Student conceptions, representations and the design of software for mathematics education®. *Proceedings of the Apple's Designing for Learning Conference,* Cupertino, CA, July 17-18,1989.
- Confrey J., «Splitting similarity and rate of change: New approaches to multiplication and exponential functions». *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (Harel G. & Confrey J., eds), NY Suny Press, Albany 1992.

- Dennis J. R., Kansky R. J.,*"Instructional Computing. An action guide for educators",* 1985, Scott, Foresman & Co.
- diSessa A. & Abelson H., «Boxer: A reconstructible computational medium». *Communications of the ACM,* vol. 29, No 9, Sep. 1986.
- diSessa A., «What will it mean to be educated in 2020?», *Technology and education: Looking towards 2020* (Nickerson R. & Zodhiates P., eds), Hilldale 1988.
- diSessa A., Hoyles C., Noss R. & Edwards L. (eds). *Computers and exploratory learning,* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 1995.
- Dreyfus D. & Eisenberg T, «0n the deep structure of functions**»,** *Proceedings ofPME 11,* p. 190-196, Montreal 1986.
- Donaldson M., *Children's Minds*, Fontana Paperbacks, London, 1984.
- Dubinsky E., *Reflective abstraction in Advanced mathematical Thinking*, In Advanced mathematical Thinking, Edited by Tall D., Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky E., & Harel G., *The concept of function. Aspects of epistimology and pedagogy.* Mathematical Association of America, 1992.
- Eisenberg T. & Dreyfus D., «0n the reluctance to visualize in mathematics". *Visualization in teaching and learning mathematics* (Zimmerman W. & Cunnigham S., eds). Mathematical Association of America, Notes Series, vol. 19, p. 25-37,1991.
- Eisenberg T., *Functions and associated learning difficulties,* In Advanced Mathematical Thinking, Edited by Tall D., Kluwer Academic Publishers.
- Fisher, G. (1984, March). *The social effects of computers in education*. Electronic Learning. pp26-28.
- Freudenthal H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Reidel, 1983.
- Function Probe, *User manual*, Apple Macintosh Computers.
- Henry Michel, *Διδακτική Μαθηματικών*, μετάφραση από τα γαλλικά, έκδοση και επιμέλεια Σπύρου Π, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα 1999.
- Hoyles C. & Noss R**.,** «Deconstructing microwords». *Advanced technologies in the teaching of mathematics and science* (Ferguson D. L.. ed.). Springer-Verlag, 1992.
- Hoyles C. & Sutherland R., *Logo Mathematics in the classroom,* Routledge, 1992.
- Hughes M., *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών*, Εκδ. Gutenberg, 1996.
- Johnson, Johnson (1975). *Learning together and alone: Cooperation, competition and individualization*. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall.
- Johnson, D. & Johnson, R. (1989*). Cooperative learning*. In Anderson, L. The effective teacher. Study Guide and Readings. Singapore: McGraw Hill.
- Johnson, Johnson and Holubec (1990). *Circles of Learning. Cooperation in the Classroom*. Edina, Minn.: Interaction Book Company.

- Jonhson, R.T., Johnson D.W., & Stanne, M. B.(1985). Effects of cooperative, competitive, and individualistic goal structures on computer-assisted instruction. Journal of Education Psychology.

- Johnson & Rising, *"Guidelines for teaching Mathematics"*, Wadsworth Publishing Co Inc. Belmont, Ca.
- Κοντογιανοπούλου- Πολυδωρίδη, «Οι εκπαιδευτικές και κοινωνικές διαστάσεις της χρήσης των νέων τεχνολογιών στο σχολείο», Σύγχρονα Θέματα, τευχ. 46-47, σ. 77-93, 1991.
- Kontogiannopoulou-Polidorides G., «Educational paradigms and models of computer use:Does technology change educational practice?», Cross *national policies and practices on computers in education* (Plomp T, Anderson R. E. & Kontogiannopoulou-Polidorides G., eds), p. 49-84, Kluwer Academic Press, Dordrecht 1996.
- Κανάκης, Ι. *Η οργάνωση της διδασκαλίας μάθησης με ομάδες εργασίας*. Αθήνα, 1987.
- Katz V. J., A *History of Mathematics*. New York: Harper College Publishers, 1993.
- Κλαουδάτος Ν. *, Σημειώσεις του μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών»*, Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα 1996.
- Κολέζα Ε. , *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Εκδ. Leader Books, Αθήνα, 2000.
- Κολέζα Ε. , Μακρής Κ. , Σουρλάς Κ., *Θέματα διδακτικής των μαθηματικών*, Εκδ. Gutenberg, Αθήνα 1999.
- Κουτσελίνη, Μ. & Θεοφιλίδης, Χ. Διερεύνηση και διδασκαλία για μια αποτελεσματική διδασκαλία. Αθήνα: Γρηγόρης, 1998.

- Koyre A.,1943. *Galileo and Plato*, Journal of History of Ideas, Ελληνική μετάφραση: Κ. Κριμπά, *Γαλιλαίος και Πλάτων*, Νεύσις,1994.
- Κυνηγός Χ. , Ε.Δημαράκη και συγγραφείς. *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφορικά Μέσα*, εκδ. Καστανιώτη, Αθήνα, 2002.
- Κυνηγός Χ., «Η ευκαιρία που δεν πρέπει να χαθεί: Η υπολογιστική τεχνολογία ως εργαλείο έκφρασης και διερεύνησης στη γενική παιδεία», Ελληνική εκπαίδευση: Προοπτικές ανασυγκρότησης και εκσυγχρονισμού (επιμ. Καζαμίας Α. & Κασσωτάκης Μ.), σ. 396-416, Σείριος, 1995.
- Lakatos I.,(1976). *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press. Ελληνική μετάφραση: *Αποδείξεις και Ανασκευές*, εκδ. Τροχαλία, Αθήνα, 1996.
- Lakoff G., & Nunez E., *Where Mathematics comes from.* New York: Basic Books, 2000.
- Markowits Z., Eylon B. & Bruckheimer M., «Functions today and yesterday», *For the Learning of Mathematics,* vol. 6, No 2, p.18-24, 1986.
- Manning, M. & Lucking, R. (1990). Ability grouping: *Realities and alternatives*. Childhood Education, 66(44), pp. 254-258.
- Mercer N. & Fisher E., «How do teachers help children to lean? An analysis of teachers' interventions in computer based activities», *Learning and Instruction,* vol. 2, p. 339-355,1992.
- Mevarech, Z. R., Stern, D., & Levita, I. (1987). *To cooperate or not to cooperate in CAI: That is the question*. Journal of Educational Research. 80(3). 164-167.

- Moreira C. & Noss R., «Understanding teachers' attitudes change in a Logomathematics environments», *Educational Studies In Mathematics,* vol. 28, p. 155-176, 1995.
- Mueller I., 1981. *Philosophy of Mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. Cambrige, Massachussets-London:MIT.
- Noss R., Sutherland R. & Hoyles C., *Teachers' attitudes and interactions,* final report of the Microworlds Project, Institute of Education, London 1991.
- Okey, J. R. & Majer, K. (1976,Spring). *Individual and small-group learning with computer-assisted introduction*. Audio-visual Communication Review. pp 79-86.
- Papert S., *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas.* Harvester Press, 1980.
- Papert S., *The children's machine. Rethinking school in the age of the computer.* Basic Books, New York 1993.
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών*, Αθήνα, 2002.
- Piaget J., Grize J. B., Szeminska A., & Bang V., *Epistemology and Psycology of Functions.*
- Polya G., *Πώς να το λύσω*. Μετ. Σιαδήμας Λάμπης, Εκδ. Σπηλιώτη.
- Πολυδούρης Β., *'Παιδεία το αθέατο ημισφαίριο'*, Εκδ. Αφοι Κυριακίδη, 1996.
- Ponte J., *Functional reasoning and interpretation of cartesian graphs,* doctoral dissertation, University of Georgia, Athens, Georgia 1984.
- Ρουσόπουλος Γ., *Επιστημολογία των Μαθηματικών*, Εκδ Guttenberg, Αθήνα, 1991.
- Simonson, M.R. & Thompson, A. (1997). *Educational computing foundations*. 3rd ed. New Jersey: Merill.
- Scrimshaw P., Language, computers and classrooms, Routledge, 1993.
- Sierpinska A., *On understanding the notion of fuction*, in G. Harel & E. Dubinsky, MAA Notes, Vol. 25, 1992.
- Slavin R.E. (1983*). Cooperative Learning*. New York: Longman
- Slavin R. E. (1995). *Cooperative Learning Theory, Research and Practice*. (2nd ed.) Boston: Allyn & Bacon.
- Sloan Douglas, *"Critical Judgments"*, Άρθρο από το "Computers & Electronics", Μάρτιος 1985.
- Soloway E., «Quick, where do the computers go?». *Communications of the ACM,* Vol. 34, No 2,1991.
- Szabo A., *Απαρχές των Ελληνικών Μαθηματικών*, Ελληνική μετάφραση: Φ. Βασιλείου, ΤΕΕ Αθήνα, 1973.
- Τουμάσης Μ. , *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, Εκδ. Gutenberg, Αθήνα 1994.
- US Congress, Office of Technology Assessment, (1988). *Power On. New tools for teaching and learning*. Washington.
- Webb N. M., (1984). Microcomputer learning in small group: Cognitive requirements and group processes. Journal of Educational Psychology. 76(6), 1076-1088.
- Χαραλάμπους, Ν. *Η διαφορική επίδραση της συνεργατικής και ατομικής μάθησης στη σχολική επίδοση*. Λευκωσία: Θέοπρες, 1996.

- Yackel E. & Cobb P., «Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics», *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 27, No 4, p. 458-477,1996.