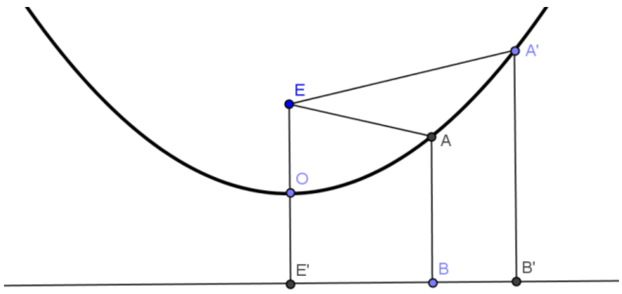
Η μεγαλοφυΐα του Αρχιμήδη μέσα από το πάντρεμα της Φυσικής με τα μαθηματικά

Σ' αυτό το σημείωμα θα αναφερθώ στον τρόπο με τον οποίο ο Αρχιμήδης υπολόγισε το εμβαδόν ενός τμήματος παραβολής, χρησιμοποιώντας ιδέες από τον απειροστικό λογισμό (ο οποίος διατυπώθηκε από τον Λάιμπνιτς και τον Νεύτωνα περίπου 1900 χρόνια μετά) τις οποίες πάντρεψε με περίτεχνο τρόπο με βασικές αρχές της φυσικής περί μοχλών και ισορροπία στερεών σωμάτων. Στόχος του σημειώματος είναι να μπορέσουν οι σκέψεις αυτές του Αρχιμήδη, να γίνουν κατανοητές από έναν μαθητή Λυκείου. Για την επίτευξη αυτού του στόχου υπάρχουν και μερικές ιστορικές ανακρίβειες σε σχέση με τη μεθοδολογία που ακολούθησε. .

Ορισμός της παραβολής

Παραβολή ονομάζουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από δεδομένο σταθερό σημείο (Ε) και ευθεία (Ε'Β')

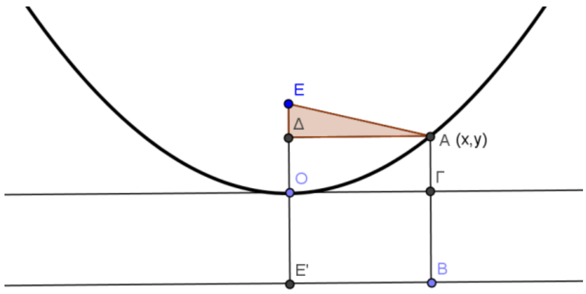
Στο σχήμα (1) απεικονίζεται μία παραβολή
Άρα λόγω του ορισμού θα ισχύουν ΕΑ=ΑΒ, ΕΑ'=Α'Β' και ΕΟ=ΟΕ'=a



Σχ 1. *Ορισμός της παραβολής*

Εύρεση της εξίσωσης της παραβολής

Από προηγούμενα καλέσαμε ΕΟ=ΟΕ'=a
Παίρνοντας την αρχή των αξόνων στο σημείο Ο από τις συντεταγμένες του σημείου Α έχουμε ΟΓ=x και ΟΔ=y



Σχ 2. *Εξίσωση της παραβολής*

Από τον ορισμό της παραβολής έχουμε

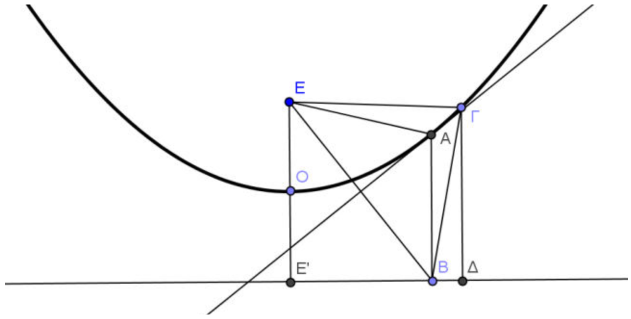
ΕΑ=ΑΒ → $(ΕΑ)^2=(ΑΒ)^2$ → $(ΕΔ)^2+(ΔΑ)^2=((ΑΓ)+(ΓΒ))^2$ →

$$(a - y)^2 + x^2 = (a + y)^2 \rightarrow 4ay = x^2 \rightarrow y = \frac{x^2}{4a}$$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής **$y=cx^2$**

$1^η$ Ιδιότητα της παραβολής

Έστω σημείο Α της παραβολής το οποίο λόγω του ορισμού θα ισχύει ΑΕ=ΑΒ. Η μεσοκάθετος της ΕΒ είναι εφαπτομένη στην παραβολή.

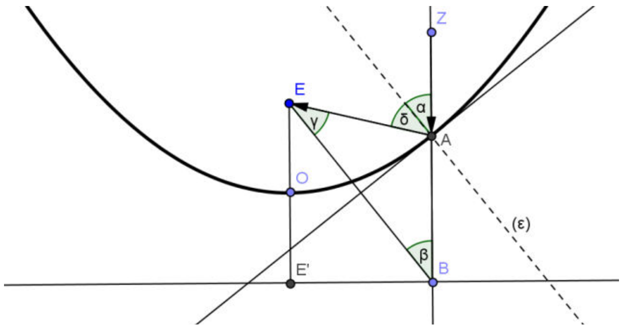


Σχ 3. *$1^η$ Ιδιότητα της παραβολής*

Αν φέρουμε τη μεσοκάθετο της ΕΒ, αυτή θα είναι και εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Α. Πράγματι, έστω ότι η μεσοκάθετος δεν είναι εφαπτομένη. Τότε θα τέμνει την παραβολή και σε κάποιο άλλο σημείο, έστω το Γ. Αφού το Γ είναι σημείο της παραβολής θα ισχύει ότι ΓΕ=ΓΔ. Από την άλλη, επειδή το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο, θα ισχύει ΓΕ=ΓΒ.. Άρα ΓΔ=ΓΒ όπερ άτοπο αφού ΓΒ>ΓΔ ως υποτείνουσα και κάθετος του ορθογωνίου.

$2^η$ Ιδιότητα της παραβολής

Ας φανταστούμε ότι η παραβολή είναι εσωτερικά ένας καθρέφτης. Αν φέρουμε μία ευθεία παράλληλη στον άξονα της παραβολής ΕΕ' και αυτή ανακλαστεί πάνω στον καθρέφτη της παραβολής, μετά την ανάκλαση θα περάσει από το σημείο Ε. Γι αυτό και το σημείο αυτό το ονομάζουμε εστία, αφού όλες οι παράλληλες προς τον άξονα, ανακλώμενες από την παραβολή, περνάνε (μαζεύονται) από το σημείο αυτό.



Σχ 4. *$2^η$ Ιδιότητα της παραβολής*

Φέρνουμε μία βοηθητική ευθεία κάθετη στην εφαπτομένη που περνάει από το σημείο Α. Λόγω της $1^{ης}$ ιδιότητας η ευθεία αυτή θα είναι παράλληλη προς την ΕΒ. Λόγω της παραλληλίας, α=β και δ=γ. Λόγω της σχέσης ΑΕ=ΑΒ ισχύει γ=β. Άρα α=δ. Επομένως η ανακλώμενη ακτίνα ΖΑ στο σημείο Α θα είναι η ΑΕ. Με άλλα λόγια κάθε ευθεία ΖΑ παράλληλη προς τον άξονα ΕΕ' μετά την ανάκλασή της στον παραβολικό καθρέφτη, περνάει από την εστία Ε.

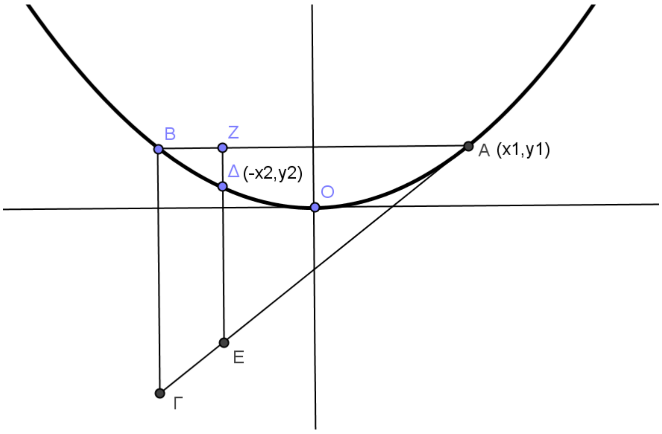
$3^η$ Ιδιότητα της παραβολής

Η κλίση της παραβολής στο σημείο Α με συντεταγμένες (χ,ψ) είναι ίση με x/2a

Αναφερόμενοι στο σχήμα (4) η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο Α είναι ίση με τη γωνία ΒΕΕ΄ αφού έχουν τις πλευρές ανά δύο κάθετες. Η εφαπτομένη όμως της γωνίας εκφράζεται ως εφφ=(Ε'Β)/(ΕΕ΄)=x/2a αφού όπως προαναφέραμε ΕΟ=ΟΕ'=a

$4^η$ Ιδιότητα παραβολής

Από σημείο Α(x1,y1) της παραβολής φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα xx' που τέμνει την παραβολή στο σημείο Β(-x1,y1) καθώς και την εφαπτομένη της παραβολής στο Α. Από το Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα yy' που τέμνει την εφαπτομένη στο Α στο σημείο Γ, δημιουργώντας έτσι το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ(-x2,y2) της παραβολής φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα yy' που τέμνει την ΑΒ στο Ζ και την εφαπτομένη ΑΓ στο Ε. Τότε ισχύει (ΔΖ)(ΑΒ)=(ΕΖ)(ΒΖ)



Σχ 5. $4^η$ Ιδιότητα της παραβολής

$$\Delta Z = y_1 - y_2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{4a} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{4a}$$

$AB = 2x_1$

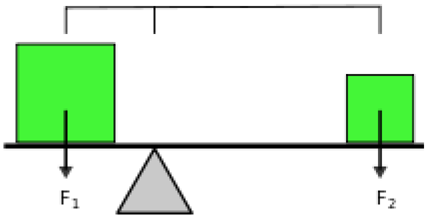
$EZ = AZ$ εφφ $= (x_1+x_2)\, x_1/2a$ λόγω της προηγούμενης ιδιότητας

$BZ = x_1-x_2$

Αντικαθιστώντας διαπιστώνουμε ότι η ιδιότητα αποδείχτηκε.

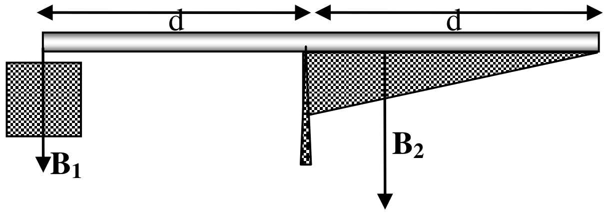
Την ιδιότητα αυτή της παραβολής την οποία είχε ανακαλύψει ο Εύδοξος, χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης για να βρει το εμβαδόν παραβολικού τμήματος με έναν μεγαλοφυή τρόπο, ο οποίος ενπεριέχει σπέρματα του απειροστικού λογισμού. Ο απειροστικός λογισμός θα διατυπωθεί 1900 περίπου χρόνια μετά τον Αρχιμήδη, από τον Νεύτωνα και τον Λάιμπνιτς σχεδόν ταυτόχρονα.

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε μία μεγαλοφυή μέθοδο παντρεύοντας τη φυσική με τα μαθηματικά. Η βασική του ιδέα βασιζόταν στην ισορροπία στερεών σωμάτων και των μοχλών. Στο σχήμα (6) για να υπάρχει ισορροπία θα πρέπει να ισχύει $F_1D_1=F_2D_2$
Αν τώρα τα σώματα έχουν ίσο πάχος και πυκνότητα τότε το βάρος τους θα είναι ανάλογο του εμβαδού τους, οπότε για την ισορροπία θα ισχύει $E_1D_1=E_2D_2$



Σχ 6. Ισορροπία μοχλού

Το κέντρο βάρους ενός τριγώνου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαμέσων του*. Το βαρύκεντρο χωρίζει την κάθε διάμεσο του τριγώνου σε λόγο 2/1



Σχ 7. Ισορροπία ισοπαχών εμβαδών

Έτσι εάν υπάρχει ισορροπία στο παραπάνω σχήμα και το εμβαδόν του τετραγώνου είναι E_1 ενώ του τριγώνου E_2 θα ισχύει

$d\,E_1 = 1/3d\,E_2 \rightarrow E_1 = 1/3E_2$

Αναφερόμενοι τώρα στο σχήμα (8) επέκταση του σχήματος (5), φανταζόμαστε το τμήμα της παραβολής ΑΒ και το τρίγωνο ΑΒΓ να αποτελούνται από πολλές λεπτές λωρίδες. Τον άξονα ΑΒ τον φανταζόμαστε ως έναν μεγάλο αβαρή δοκό που στο σημείο Α υπάρχει ένα στήριγμα.

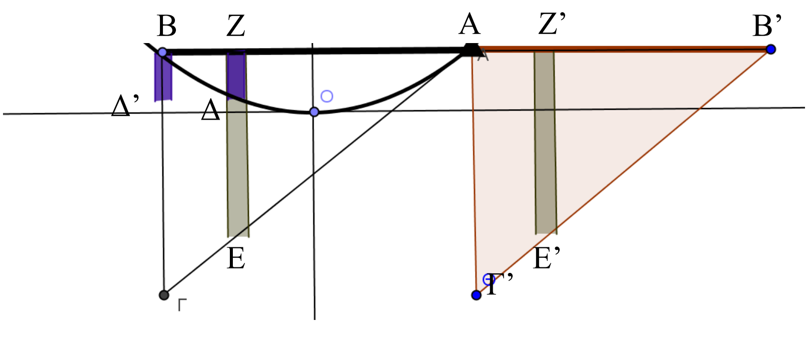
Έστω ΒΔ'=ΖΔ και ΒΖ=ΑΖ'

Τότε λόγω της $4^{ης}$ ιδιότητας θα έχουμε:

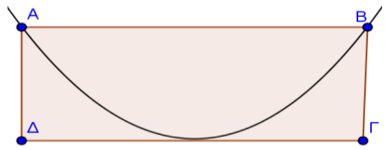
(ΔΖ)(ΑΒ)=(ΕΖ)(ΒΖ) → (ΒΔ')(ΑΒ)=(Ζ'Ε')(ΑΖ΄)

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το η λωρίδα ΖΔ της παραβολής αν τοποθετηθεί στο σημείο Β εξισορροπείται από τη λωρίδα του τριγώνου ΖΕ αν τοποθετηθεί στη θέση Ζ'. Αν αυτό το επεκτείνουμε για όλες τις λωρίδες της παραβολής και του τριγώνου, θα έχουμε όλη η παραβολή να έχει τοποθετηθεί στο σημείο Β και να εξισορροπείται από το τρίγωνο ΑΒ'Γ'=ΑΒΓ το οποίο έχει τοποθετηθεί δεξιά του Α. Έτσι λόγω της παραπάνω παρατήρησης θα ισχύει

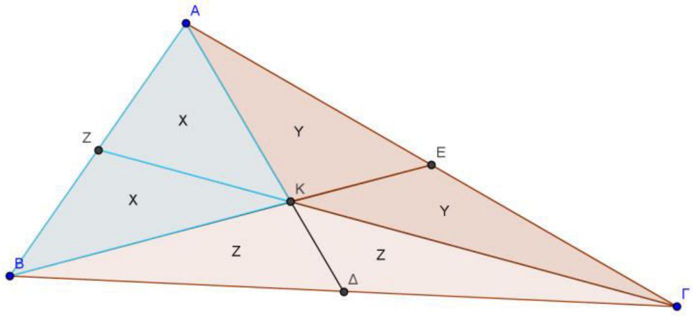
$$E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta}(AB) = E_{\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\upsilon}(AB')1/3 \rightarrow E_{\pi\alpha\rho\alpha\beta} = \frac{1}{3}\frac{(2x)x2x}{4a} = \frac{4xy}{3}$$



Σχ 8. Σύγκριση εμβαδού παραβολής με εμβαδόν τριγώνου



Τελικά ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι το εμβαδόν της παραβολής που περικλείεται από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισούται με τα 2/3 του εμβαδού του παραλληλογράμμου.
*
Απόδειξη ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου χωρίζει τη κάθε διάμεσο σε λόγο 2:1



Σχ 9. *Απόδειξη ιδιότητας διαμέσων τριγώνου*

Από τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου Ε=1/2βυ προκύπτει εύκολα ότι μία διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο τρίγωνα ίσου εμβαδού. Έτσι αν φέρουμε τις διαμέσους, θα έχουμε χωρίσει το τρίγωνο σε 6 άλλα τρίγωνα με ίσα εμβαδά ανά δύο.
Το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου είναι 2Χ+2Υ+2Ζ. Άρα το μισό θα είναι Χ+Ψ+Ζ. Μισό όμως είναι και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ όπως προαναφέραμε αφού ΑΔ διάμεσος. Έτσι
Χ+Ψ+Ζ=2Χ+Ζ → Χ=Υ
Ομοίως αποδεικνύεται ότι Υ=Ζ
Άρα οι διάμεσοι χωρίζουν το αρχικό τρίγωνο σε 6 ίσου εμβαδού τρίγωνα. Έτσι θα έχουμε.
(ΑΒΚ)=2(ΒΚΔ) → ΑΚ=2ΚΔ
Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΒΚ=2ΚΕ και ΓΚ=2ΚΖ ο.ε.δ

Παρότι κανείς δεν αμφιβάλει ότι η μέθοδος που περιγράψαμε παραπάνω για τον υπολογισμό του εμβαδού της παραβολής είναι μεγαλοφυής, ο ίδιος ο Αρχιμήδης δεν τη θεωρούσε πλήρως έγκυρη αφού για την απόδειξη, χρησιμοποιούσε ταυτόχρονα αρχές της φυσικής και των μαθηματικών. Τη θεωρούσε απλά ως καθοδηγητική για το τι ήθελε ν' αποδείξει. Γι αυτό έδωσε και μία άλλη απόδειξη του εμβαδού της παραβολής με καθαρό μαθηματικό τρόπο, χωρίς τη χρήση αρχών της φυσικής. Και αυτός ο τρόπος είναι εξίσου μεγαλοφυής. Παρακάτω θα προσπαθήσω να εξηγήσω αυτόν τον τρόπο.
Ο Αρχιμήδης ξεκίνησε από τον υπολογισμό του αθροίσματος

$$S_{\mathrm{n}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} .... + \frac{1}{4^n}$$

Απέδειξε ότι όταν το n είναι πάρα πολύ μεγάλο, αυτό το άθροισμα ισούται με **4/3**

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Στο παραπάνω άθροισμα πρόσθεσε τον όρο $\frac{1}{3}\frac{1}{4^n}$

Στη συνέχεια απέδειξε μία πολύ βασική ιδιότητα:

$$S_n + \frac{1}{3}\frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} +,,,+ \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^n} = [1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} +,,,+ \frac{1}{4^{n-1}}] + \frac{1}{4^n}\frac{4}{3} \rightarrow$$

$$S_n + \frac{1}{3}\frac{1}{4^n} = S_{n-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την παραπάνω ιδιότητα προς τα πίσω θα καταλήξουμε

$$S_n + \frac{1}{3}\frac{1}{4^n} = S_1 + \frac{1}{3}\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{3} \rightarrow S_n = -\frac{1}{3}\frac{1}{4^n} + \frac{4}{3}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε εύκολα ότι για πολύ μεγάλο n επειδή $\frac{1}{3}\frac{1}{4^n} << \frac{4}{3}$

Προκύπτει $S_n = \frac{4}{3}$

Πιο απλά θα μπορούσαμε να δουλέψουμε ως εξής

$\frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^{n-1}} = -\frac{3}{4^n}$ εφαρμόζοντας αυτή τη ταυτότητα για n, n-1, n-2,…1 και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

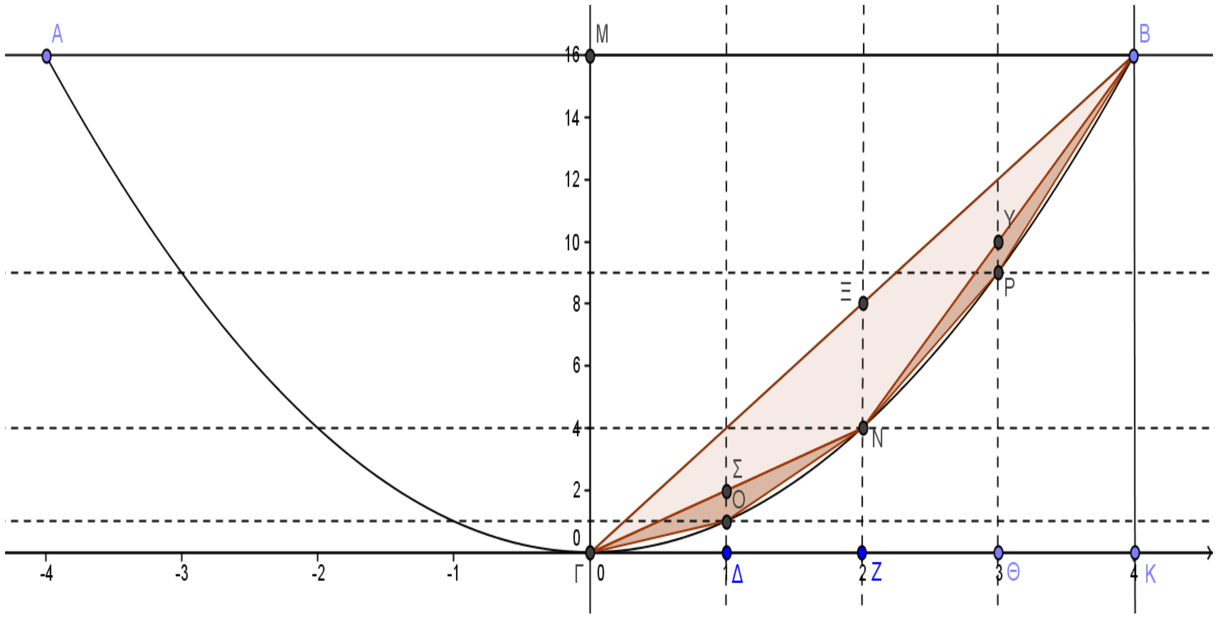
$$\frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^{n-1}} = -\frac{3}{4^n}$$

$$\frac{1}{4^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-2}} = -\frac{3}{4^{n-1}}$$

....

$$\frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4^n} - 1 = -3(S_n - 1) \rightarrow S_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}$$



Σχ 10. *Προσέγγιση εμβαδού παραβολής από άθροισμα εμβαδών τριγώνων*

Αναφερόμενοι τώρα στη μισή παραβολή παίρνουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΜΒ το οποίο έστω ότι έχει εμβαδόν Ε. Δηλαδή Ε=(ΓΜΒ)

Φέρνω τη μεσοκάθετο της ΓΚ η οποία περνάει από το σημείο Ζ της ΓΚ και τέμνει την παραβολή στο σημείο Ν. Το τρίγωνο ΓΝΒ έχει εμβαδόν Ε/4 αφού ΝΞ=ΓΜ/4

Στη συνέχεια παίρνουμε τη μεσοκάθετο της ΟΖ η οποία περνάει από το Δ και τέμνει την παραβολή στο Ο. Ομοίως η μεσοκάθετος της ΖΚ που περνάει από το Θ τέμνει την παραβολή στο Ρ. Τα δύο τρίγωνα (ΟΓΝ) +(ΝΡΒ)=Ε/16

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι ΟΣ=ΡΥ=1 οπότε (ΟΓΝ)=(ΟΣ)(ΓΖ)/2 =(ΡΥ)(ΖΚ)/2=(ΝΡΒ)

Συνεχίζοντας αυτή τη διαίρεση του κάθε τμήματος ΟΔ, ΔΖ, ΖΘ, ΘΚ στη μέση και παίρνοντας τώρα τα 8 νέα τρίγωνα που προκύπτουν, θα διαπιστώσουμε με τον ίδιο τρόπο ότι τα 8 αυτά τρίγωνα έχουν εμβαδόν Ε/64. Έτσι συνεχίζοντας αυτό το διαμερισμό των τμημάτων και παίρνοντας κάθε φορά τα σχηματιζόμενα τρίγωνα, είναι προφανές ότι όλα αυτά τα τρίγωνα αν τα συγκεντρώσουμε θα έχουμε το εμβαδόν της μισής παραβολής. Έτσι

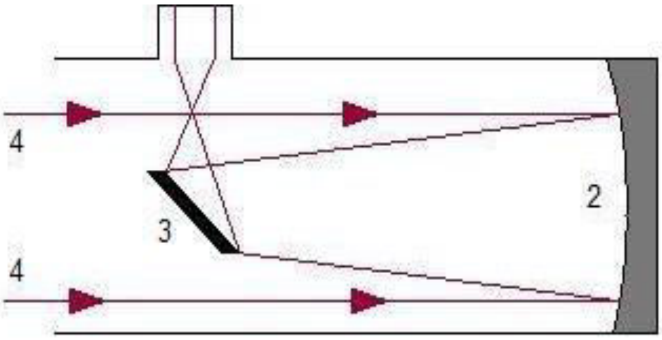
$$E_{(\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma)}/2 = \mathrm{E}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+....) = \frac{4}{3}\mathrm{E}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι (ΑΒΓ) = 2Ε καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mathbf{E_{(\pi\alpha\rho\alpha\beta)} = 4/3\ (AB\Gamma)}$$

Προς τι όλα αυτά; Θα ρωτούσε αφελώς κάποιος. Η απάντηση χωρίς δεύτερη σκέψη είναι ότι η επιστήμη δεν είναι ποτέ χρησιμοθηρική. Άποψη που είχε εκφράσει ο ίδιος ο Αρχιμήδης ο οποίος θεωρούσε την ενασχόληση με την επιστήμη πολύ ανώτερη από την ενασχόληση με την τεχνολογία, δηλαδή με τις πρακτικές εφαρμογές της, μολονότι είχε κάνει πολλές και αξιόλογες εφευρέσεις και κατασκευές.

Παρόλα αυτά η $2^{η}$ ιδιότητα της παραβολής χρησιμοποιείται: στα φανάρια των αυτοκινήτων, στις δορυφορικές κεραίες στις κεραίες για την ανίχνευση εξωγήινων σημάτων, στα τηλεσκόπια κλπ κλπ



Σχ 11. *Αρχή λειτουργίας τηλεσκοπίου*

Τελειώνοντας θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους φίλους και συναδέλφους Νίκο Καντεράκη και Δημήτρη Τσαούση στον μεν πρώτο γιατί μου έδωσε το έναυσμα για αυτή την εργασία και στον δεύτερο για τις εύστοχες παρατηρήσεις και διορθώσεις του.